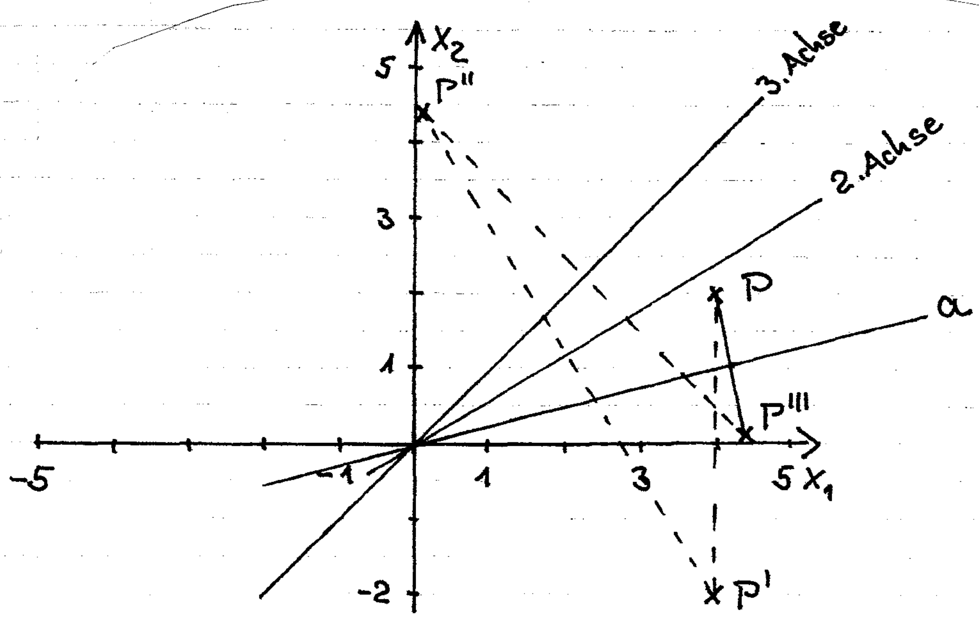
Reimund Albers, Geometrie erleben, Modul EM1.2

11. Übung, Lösungsskizzen SoSe 06

1a) $S_1: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$

$S_2: \vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{pmatrix} \vec{x} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \\ 0{,}866 & -0{,}5 \end{pmatrix} \vec{x}$

$S_3: \vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$



b) P': $\vec{p}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $P'(4; -2)$

P'': $\vec{p}'' = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \\ 0{,}866 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}268 \\ 4{,}464 \end{pmatrix}$ $P''(0{,}268; 4{,}464)$

P''': $\vec{p}''' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}268 \\ 4{,}464 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}464 \\ 0{,}268 \end{pmatrix}$ $P'''(4{,}464; 0{,}268)$

c) Zeichnung siehe oben: Abgelesene Koordinaten:
$P'(4; -2)$, $P''(0{,}2; 4{,}4)$, $P'''(4{,}4; 0{,}1)$
Man kann die abgelesenen Koordinaten vergleichen mit den berechneten in b). Sie stimmen recht gut überein.

d) Ich zeichne die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{PP'''}$.
Die Spiegelung an a bildet P auf P''' ab.

e) O liegt dann auf a, wenn $|OP| = |OP'''|$.
Da die Spiegelungen längentreue Abbildungen sind, gilt $|OP| = |OP'| = |OP''| = |OP'''|$.
Es ist also $|OP| = |OP'''|$, also muss O auf a liegen.

f) Der Winkel zwischen a und der x_1-Achse ist $14°$ (1)
Spiegelungsmatrix
$$\begin{pmatrix} \cos 28° & \sin 28° \\ \sin 28° & -\cos 28° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}883 & 0{,}469 \\ 0{,}469 & -0{,}883 \end{pmatrix}$$

g) Zu $S_3 \circ S_2 \circ S_1 = S_4$ lautet die Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cancel{1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \\ 0{,}866 & -0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}866 \\ 0{,}866 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}866 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix sollte mit der aus f) übereinstimmen, was so ungefähr stimmt.

(1) Anmerkung zu f. Der Winkel sollte eigentlich so groß sein wie der zwischen der 2. und 3. Achse, also $15°$ $(= 45° - 30°)$

Hausübungen

2a) Wenn es sich um eine Spiegelungsmatrix handeln soll, muss gelten: $\cos 2\alpha = 0{,}8$ und $\sin 2\alpha = 0{,}6$

$2\alpha \approx \cancel{53{,}13°}$ $36{,}87°$ $\qquad \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ ist erfüllt

also $\alpha \approx 18{,}44°$

b) $S \circ T$, also erst Translation, dann Spiegelung

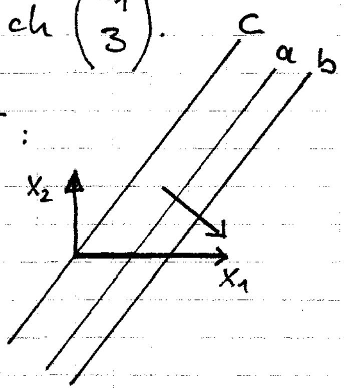
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \left[\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$T \circ S$, also erst Spiegelung, dann Translation

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) Wenn $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Spiegelungsachse ist, ist es auch $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

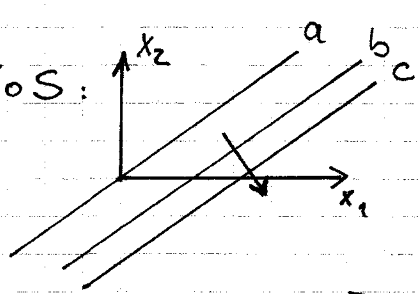
zu $S \circ T$:



Die Verschiebung wird aufgelöst in zwei Spiegelungen an zwei Geraden, die parallel zur Achse c von S sind.

Man kann nun a, b äquidistant verschieben, so dass b = c. Man erhält dann eine Spiegelung an a'. Diese Achse verläuft durch $P_1(-0{,}5; +1{,}5)$

zu $T \circ S$:

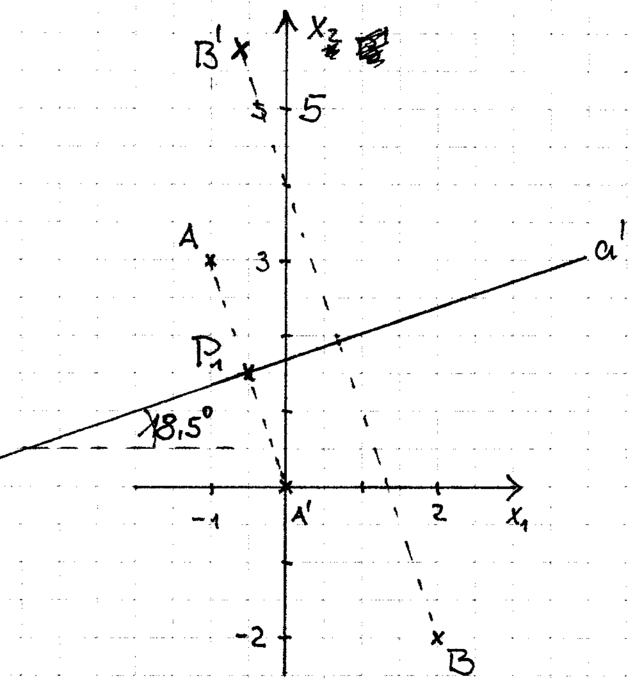


Wegen der geänderten Reihenfolge wird nun b, c verschoben, so dass b = a. Die resultierende Achse ist dann c'. Sie verläuft durch $P_2\ (0{,}5; -1{,}5)$

d) $S \circ T$: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A(-1; 3) \rightarrow A'(0; 0)$

$B(2; -2) \rightarrow B'(-0{,}6; 5{,}8)$

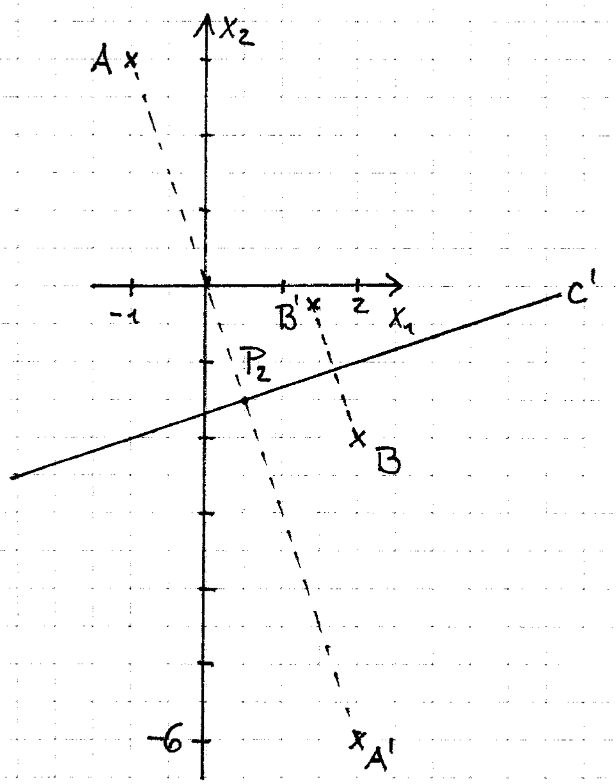


Konstruiert man zu $\overline{AA'}$ die Mittelsenkrechte, so ist es gleichzeitig die Mittelsenkrechte zu BB'. Sie verläuft durch $P_1(-0{,}5\,;\,+1{,}5)$. Der Winkel ist ca $18{,}5°$

Alle Ergebnisse der vorangehenden Rechnungen werden bestätigt.

e) $T \circ S$: $\quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

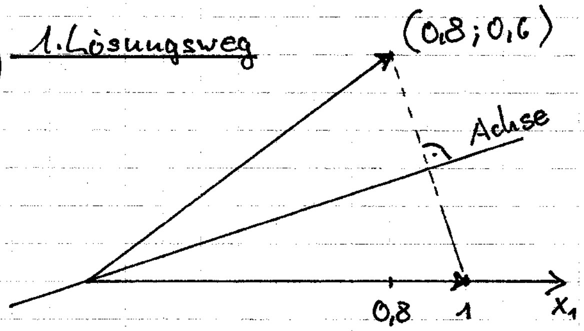
$A \rightarrow A'(2\,;-6) \qquad B(2\,;-2) \rightarrow B'(1{,}4\,;-0{,}2)$



Auch hier konstruiert man die Mittelsenkrechte zu $\overline{AA'}$. Sie verläuft durch $P_2(0{,}5\,;-1{,}5)$ Der Winkel zur Waagerechten ist wieder ca $18{,}5°$.

Auch hier werden alle Ergebnisse der vorangehenden Rechnungen bestätigt.

f) <u>1. Lösungsweg</u>



Da die linke Spalte der Abbildungsmatrix das Bild des Vektors $\binom{1}{0}$ ist, ist die Verbindungslinie zwischen (1;0) und (0,8; 0,6) senkrecht zur Achse.

Dieser Vektor ist $\begin{pmatrix} 1-0{,}8 \\ 0-0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$

Dann sind alle Vektoren, die Vielfaches von $\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$ sind, auch senkrecht zur Achse. Da $\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} \cdot 5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, ist auch $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Achse.

<u>2. Lösungsweg</u>

Das Bild von $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ bei der Abbildung mit $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Da $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot (-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, beschreiben beide Vektoren die gleiche Richtung, um 180° gedreht. Das geschieht nur mit Vektoren, die senkrecht zur Achse verlaufen.

3. 1. Begründung: Für eine Spiegelung müsste gelten

$\cos 2\alpha = 0{,}9 \qquad \sin 2\alpha = 0{,}4$

$\Rightarrow 2\alpha \approx 25{,}84° \qquad \Rightarrow 2\alpha \approx 23{,}58°$ Beide Werte liegen zu weit auseinander.

2. Begründung: Wie 1., dann aber

$\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 0{,}81 + 0{,}16 = 0{,}97 \neq 1$

3. Begründung: Da die linke Spalte der Matrix das Bild von $\binom{1}{0}$ ist und Spiegelungen längentreu sind, muss $\begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ auch die Länge 1 haben. Es ist aber $\sqrt{0{,}9^2 + 0{,}4^2} = \sqrt{0{,}97} < 1$

4. Begründung: Man bildet zwei Punkte ab und prüft, ob Ur- und Bildstrecke die gleiche Länge haben.

Einfaches Beispiel: $A(0;0) \to A'(0;0)$

$B(10;10) \to B'(13;-5)$ $|AB| = \sqrt{10^2+10^2} = \sqrt{200}$

$|A'B'| = \sqrt{13^2+(-5)^2} = \sqrt{194}$

4) a) $5 \cdot 1 + 3 \cdot 11 + 10 \cdot 11^2 + 2 \cdot 11^3$

$= 5 + 33 + 1210 + 2662 = 3910$

b) Im Elfersystem ist eine Zahl durch 10 teilbar, wenn die Quersumme durch 10 teilbar ist.

Quersumme(2A35) $= 2 + 10 + 3 + 5_{10} = 20_{10}$

Zwanzig ist durch Zehn teilbar.

c) Allgemein gilt: Im Basissystem zur Basis b ist eine Zahl durch $b+1 = 11_b$ teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch b+1 teilbar ist.

Für $b = 11_{10}$ gilt das für $b+1 = 12_{10}$.

Dann gilt eine analoge Regel für alle Teiler von 12_{10}, also auch 4.

5. Das rechte Bild ist ein Blick von oben auf das linke Bild. Also 6 Quadrate und 8 Dreiecke.

12 Ecken Kanten: $(6 \cdot 4 + 8 \cdot 3) : 2 = 24$