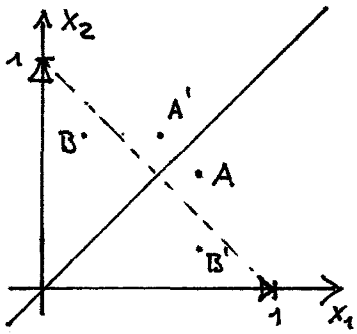
Reimund Albers, Geometrie erleben, Modul EM 1.2, SoSe06

10. Übung, Lösungsskizzen

1a.

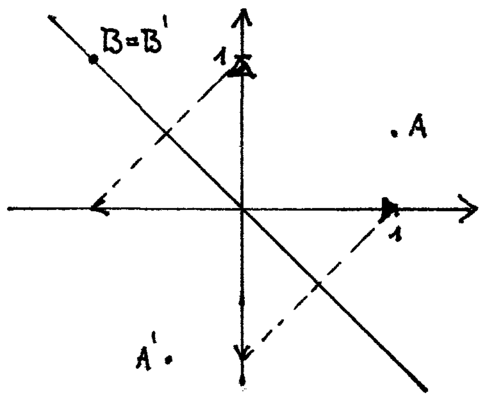


$\vec{e}_1 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_2 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abbildungsmatr. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right) \to A'\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$

b.

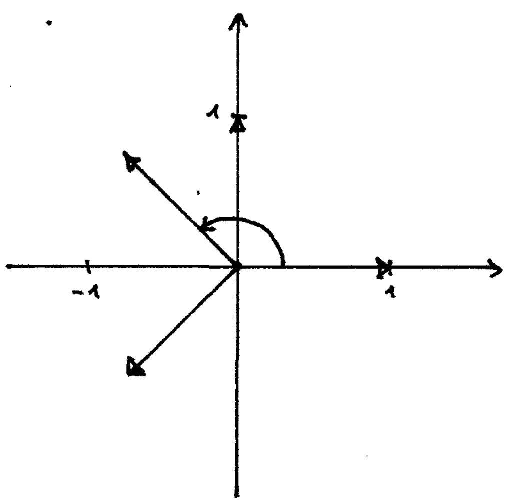


$\vec{e}_1 \to \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_2 \to \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abbildungsm. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A\left(1; \frac{1}{2}\right) \to A'\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$

c.



$\vec{e}_1 \to \begin{pmatrix} -\cos 45^\circ \\ +\sin 45^\circ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\sin 45^\circ \\ -\cos 45^\circ \end{pmatrix} \leftarrow \vec{e}_2$

Abbildungsm. $\begin{pmatrix} -\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ +\sin 45^\circ & -\cos 45^\circ \end{pmatrix}$

Vergleich mit den allgem. Abbildungsmatr.

Spiegelung $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$

a) $\alpha = 45^\circ$ $\quad \cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$ ✓

b) $\alpha = 135^\circ$ $\quad \cos 270^\circ = 0$, $\sin 270^\circ = -1$ ✓

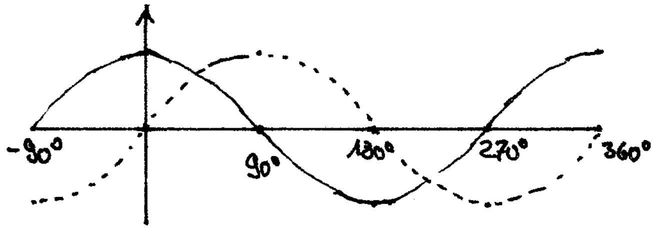
c) Drehung $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\alpha = 135^\circ$

$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ$

$\cos 135^\circ = -\sin 45^\circ$

2. Merkkurven für sin und cos



a) $\cos\alpha < 0$ und $\sin\alpha > 0 \Rightarrow 90 < \alpha < 180°$

$\cos 170° = -\cos 10° \quad \sin 170° = \sin 10°$

also $\begin{pmatrix} -\cos 10° & -\sin 10° \\ \sin 10° & -\cos 10° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 170° & -\sin 170° \\ \sin 170° & \cos 170° \end{pmatrix}$

Drehung um $\alpha = 170°$

b) $\cos\alpha < 0$ und $\sin\alpha < 0 \Rightarrow 180° < \alpha < 270°$

$\cos 200° = -\cos 20° \quad \sin 200° = -\sin 20°$

Drehung um $\alpha = 200°$

c) $\cos\alpha < 0$ und $\sin\alpha < 0 \Rightarrow 180° < \alpha < 270°$

Spiegelung an Gerade mit $\alpha = 120°$ $(2\alpha = 240°)$

d) $\cos\alpha = \sin 10° \qquad \sin\alpha = \cos 10°$

$= \cos 80° \qquad = \sin 80°$

Spiegelung an Gerade mit $\alpha = 40°$

e) $\cos\alpha < 0 \quad \sin\alpha > 0 \Rightarrow 90° < \alpha < 180°$

$\cos 160° = -\cos 20° \quad \sin 160° = \sin 20°$

Spiegelung an Gerade mit $\alpha = 80°$

f) $\cos\alpha = \sin 10° \qquad \sin\alpha = -\cos 10°$

$= \cos 80° \qquad = -\sin 80°$

$= \cos \cancel{100}\ 280° \qquad = \sin \cancel{100}\ 280°$

Drehung um $\alpha = \cancel{100°}\ 280°$

3. a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & -1-6 \\ -2-6 & 1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} = A \cdot B$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -4-3 \\ -2-3 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} = B \cdot A$

Die Multiplikation von Matrizen ist <u>nicht</u> kommutativ.

b) Drehung um α: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ um β: $\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

Multiplikation $\cancel{D_\alpha \cdot D_\beta = \Big(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin\beta}$

$$D_\alpha \cdot D_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

mit den Additionstheoremen gilt

$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$ also Matrix einer Drehung um $\alpha+\beta$ um O

---

c) $A \cdot B = E$ mit $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

① $2b_{11} + b_{21} = 1$ ③ $2b_{12} + b_{22} = 0$

② $5b_{11} + 3b_{21} = 0$ ④ $5b_{12} + 3b_{22} = 1$

$3 \cdot$①$-$②: $b_{11} = 3$ $3 \cdot$③$-$④: $b_{12} = -1$

$b_{21} = 1 - 6 = -5$ $b_{22} = 0 - (-2) = 2$

also lautet $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 3-3 \\ -10+10 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4a) Mit $\cos\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}64} = 0{,}6$

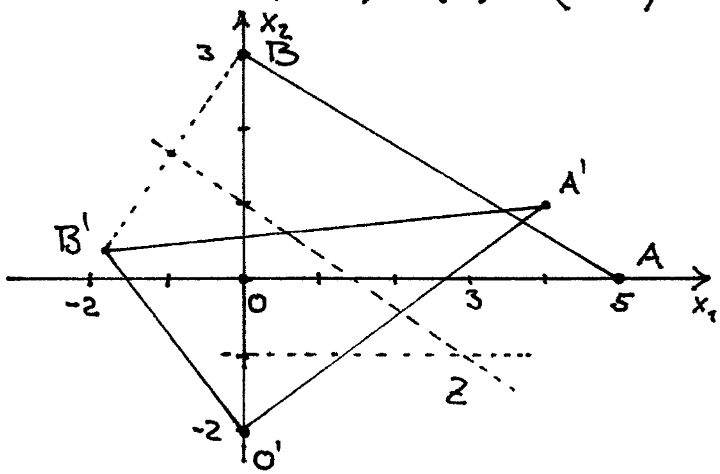
Also hat die Matrix die Form $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, also die einer Drehung.

Nach der Drehung wird eine Verschiebung ausgeführt.

Die Verknüpfung zweier gleichsinniger Abbildungen ist wieder eine gleichsinnige Abbildung. Es kann keine (reine) Verschiebung sein, folglich muss es eine Drehung sein

b) $O'(0; -2)$ $\quad \vec{a}\,' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad A'(4; 1)$

$\vec{b}\,' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ $\quad B'(-1{,}8; 0{,}4)$



Laut Zeichnung:

$Z(2{,}9; -1)$

c) Berechnung des Fixpunktes

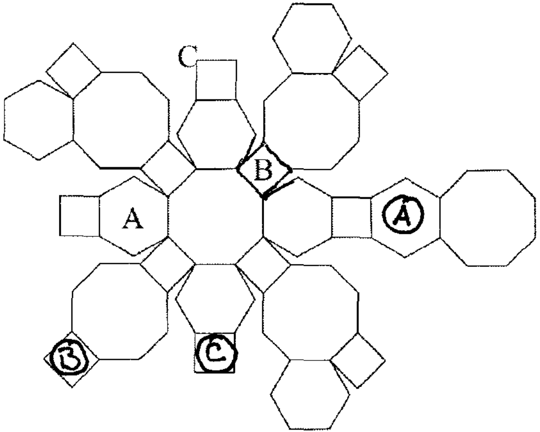
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} z_1 &= 0{,}8 z_1 - 0{,}6 z_2 \\ z_2 &= 0{,}6 z_1 + 0{,}8 z_2 - 2 \end{aligned}$$

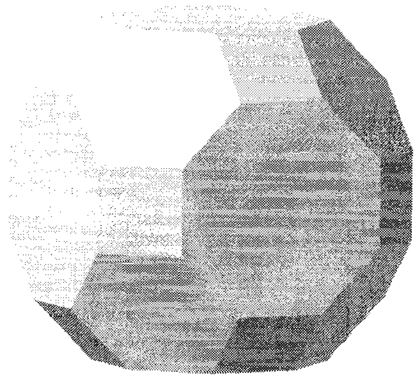
$$\begin{aligned} 0{,}2 z_1 + 0{,}6 z_2 &= 0 \\ -0{,}6 z_1 + 0{,}2 z_2 &= -2 \end{aligned}$$ hat als Lösung $z_1 = 3 \quad z_2 = -1$

rechnerische Lösung: $Z(3; -1)$

5.

5





Bestimmen Sie die Flächen, die den markierten Flächen gegenüber liegen.

Die mit A B und C markierten Flächen sind die Lösungen.