Übung 09, Lösungsskizzen

1. Die Abbildungsgleichung lautet also: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0{,}5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$.

O(0,0) einsetzen: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$, also O'(-1; 2,5)

A(3; -2) einsetzen: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0{,}5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ ergibt $\begin{matrix} x_1' = -1\cdot 3 - 2\cdot 2 - 1 = -8 \\ x_2' = 0{,}5\cdot 3 - 3\cdot 2 + 2{,}5 = -2 \end{matrix}$, also A'(-8; -2)

B(-1; 1) einsetzen: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0{,}5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ ergibt $\begin{matrix} x_1' = (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 1 - 1 = 2 \\ x_2' = 0{,}5\cdot(-1) + 3\cdot 1 + 2{,}5 = 5 \end{matrix}$, also B'(2; 5)

Der Mittelpunkt M hat die Koordinaten (1; -0,5). Eingesetzt in die Abbildungsgleichung ergibt: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0{,}5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$, also $\begin{matrix} x_1' = -1\cdot 1 - 2\cdot 0{,}5 - 1 = -3 \\ x_2' = 0{,}5\cdot 1 - 3\cdot 0{,}5 + 2{,}5 = 1{,}5 \end{matrix}$. Damit hat M' die Koordinaten (-3; 1,5). Das ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A'B'}$.

---

2. $O(0;0) \rightarrow O'(3;-1) \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ansatz: $x_1' = a_{11}\cdot x_1 + a_{12}x_2 + 3$

$x_2' = a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 - 1$

$A \rightarrow A'$ einsetzen $\qquad B \rightarrow B'$ einsetzen

---

$6 = a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 1 + 3 \qquad 2 = a_{11}\cdot(-1) + a_{12}\cdot 0 + 3$

$-2 = a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 1 - 1 \qquad 0 = a_{21}\cdot(-1) + a_{22}\cdot 0 - 1$

Man erhält 2 Gleichungssysteme (zeilenweise) mit 2 Unbekannten:

1. Zeile

$a_{11} + a_{12} = 6 - 3 = 3$

$-a_{11} = 2 - 3 = -1$

$a_{11} = 1$

$a_{12} = 3 - 1 = 2$

2. Zeile

$a_{21} + a_{22} = -2 + 1 = -1$

$-a_{21} = 0 + 1 = 1$

$a_{21} = -1$

$a_{22} = -1 + 1 = 0$

$\Rightarrow$ Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ insges. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

HAUSÜBUNGEN

3. a. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ Setzt man $\beta=90^\circ-\alpha$ ein, ergibt sich
$\sin(\alpha+90^\circ-\alpha)=\sin 90^\circ=1=\sin\alpha\cos(90^\circ-\alpha)+\cos\alpha\sin(90^\circ-\alpha)$
Die Winkelfunktionen mit 90°-α kann man ersetzen durch $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ und $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ und erhält dann $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

b. Bekannt: $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ und $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha\\ &= 3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha\end{aligned}$$

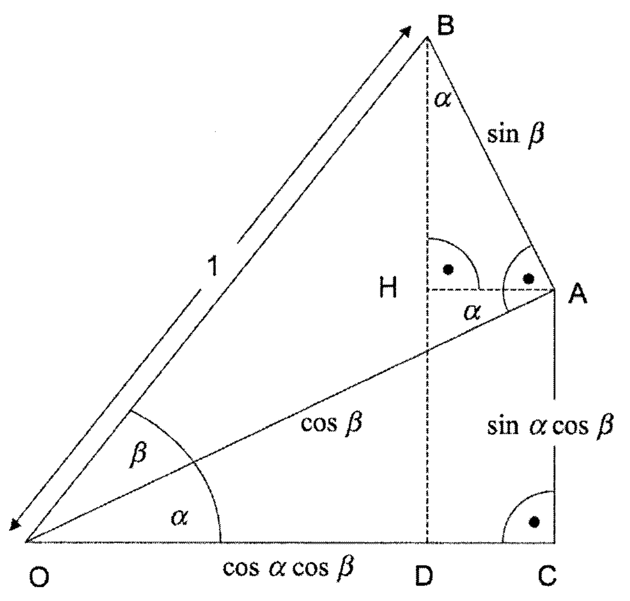
Probe für $\alpha=30^\circ$: $\sin 3\alpha=\sin 90^\circ=1$
$3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=3\sin 30^\circ\cdot\cos^2 30^\circ-\sin^3 30^\circ$
Mit $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ und $\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ erhält man im letzten Term $3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{8}-\frac{1}{8}=1$

c. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\sqrt{\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}$
Die Kosinus-Funktion hat für $\alpha=90^\circ$ eine Nullstelle, folglich wird der Nenner 0.

d. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

Kürzt man diesen Bruch mit $\cos\alpha\cos\beta$, erhält man $\dfrac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$. Mit $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ erhält man das angegebene Ergebnis.

4. Da das Dreieck OAB direkt das „Merkdreieck" für den Winkel β ist, sind $|OA|=\cos\beta$ und $|AB|=\sin\beta$. Das Dreieck OCA ist das mit cos β gestauchte „Merkdreieck" für den Winkel α, also sind $|OC|=\cos\alpha\cos\beta$ und $|AC|=\sin\alpha\cos\beta$. Für die Winkel gilt: $|\sphericalangle HAO|=|\sphericalangle ABH|=\alpha$. Also ist das Dreieck HAB das mit sin β gestauchte „Merkdreieck" für den Winkel α, also sind $|HB|=\cos\alpha\sin\beta$ und $|HA|=\sin\alpha\sin\beta$.



Damit haben wir alle notwendigen Teilstrecken bestimmt.

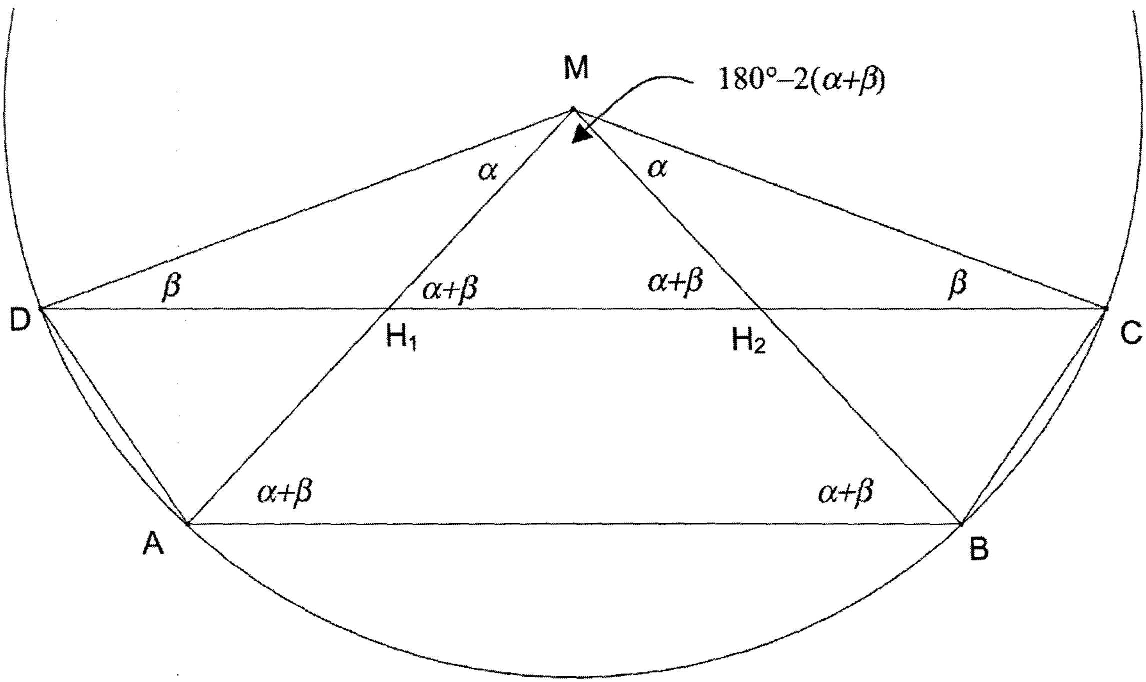
$$\begin{aligned}|DB| &= \sin(\alpha+\beta)\\ &= |DH|+|HB|\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|OD| &= \cos(\alpha+\beta)\\ &= |OC|-|DC|\\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

5. a. Winkel- und Kongruenzsätze

$|AD| = |BC| \Rightarrow AB \parallel CD$

Die Parallelität wird gezeigt über die Stufenwinkel $\sphericalangle CH_1M$ und $\sphericalangle BAM$. Wenn diese gleich groß sind, müssen die Geraden AB und CD parallel verlaufen.



Sei der Winkel $|\sphericalangle AMD| = \alpha$. Die Dreiecke AMD und BCM sind kongruent, denn nach Voraussetzung ist $|AD| = |BC|$ und die anderen Dreiecksseiten sind Kreisradien, also auch gleich lang. Also ist auch $|\sphericalangle BMC| = \alpha$.

Sei $|\sphericalangle CDM| = \beta$. Da das Dreieck DCM gleichschenklig ist, ist auch $|\sphericalangle MCD| = \beta$.

Nun rechnet man nacheinander aus:

$|\sphericalangle H_2H_1M| = \alpha + \beta$ und entsprechend auch $|\sphericalangle MH_2H_1| = \alpha + \beta$

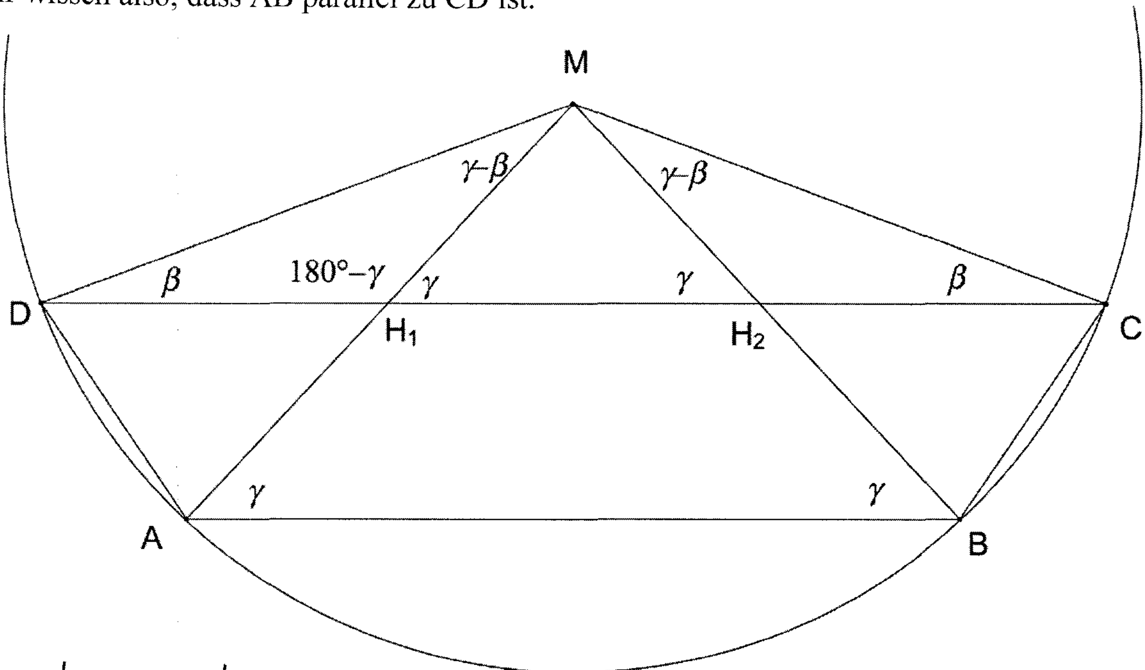
$|\sphericalangle H_1MH_2| = 180° - 2(\alpha + \beta)$

Da das Dreieck ABM gleichschenklig ist, gilt für einen Basiswinkel

$|\sphericalangle BAM| = \frac{1}{2}\left(180° - \left(180° - 2(\alpha + \beta)\right)\right) = \alpha + \beta$ q.e.d.

$|AD| = |BC| \Leftarrow AB \parallel CD$

Wir wissen also, dass AB parallel zu CD ist.



Sei $|\sphericalangle H_2 H_1 M| = \gamma$

Dann gilt $|\sphericalangle H_2 H_1 M| = |\sphericalangle BAM| = \gamma$, da Stufenwinkel an Parallelen

$|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle MBA| = \gamma$, da ΔABM gleichschenklig

$|\sphericalangle MBA| = |\sphericalangle M H_2 H_1| = \gamma$, da Stufenwinkel an Parallelen

$|\sphericalangle M H_1 D| = 180° - \gamma$, da Nebenwinkel

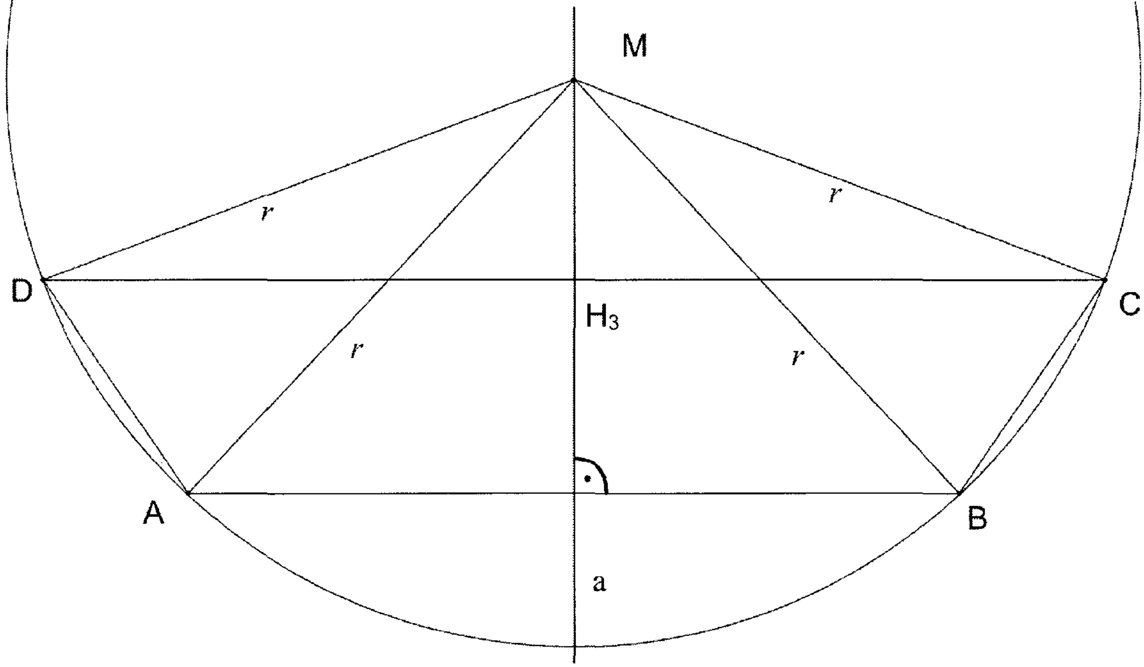
Sei $|\sphericalangle H_1 D M| = \beta$

$|\sphericalangle D M H_1| = 180° - (180° - \gamma) - \beta = \gamma - \beta$ Winkelsumme im Δ

Analog gilt das im $\Delta H_2 C M$, also $|\sphericalangle H_2 M C| = \gamma - \beta$

Dann sind $\Delta AMD \cong \Delta BCM$ nach SWS $(r, \gamma-\beta, r)$

Also gilt $|AD| = |BC|$ q.e.d.



b) Beweis über eine Spiegelung

Es sei a die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ und S_a die Spiegelung an a. Da ΔABM gleichschenklig ist, liegt M auf a, also $S_a(M) = M$. Außerdem gilt $S_a(A) = B$

zu zeigen: $|AD| = |BC| \Rightarrow AB \parallel CD$

$|AD| = |BC|$ Dann sind $\Delta AMD \cong \Delta BCM$ nach SSS

Da $S_a(A) = B$, $S_a(M) = M$ und Drehsinn ΔMAD im Uhrzeigers Drehsinn ΔMBC gegen Uhrzeigers, ist $S_a(D) = C$

$\Rightarrow CD \perp a$. Da auch $AB \perp a$, gilt $CD \parallel AB$ q.e.d.

zu zeigen: $|AD| = |BC| \Leftarrow AB \parallel CD$

$AB \parallel CD \Rightarrow CD \perp a$, da auch $AB \perp a$

ΔDCM gleichschenklig, also gilt $|DH_3| = |H_3C|$

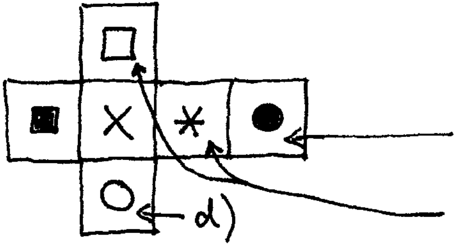
$\Rightarrow S_a(D) = C$ also $S_a(\overline{AD}) = \overline{BC}$.

$\Rightarrow |AD| = |BC|$, da Spiegelungen längentreu sind.

q.e.d.

Durch „Aufklappen" der sichtbaren drei Flächen findet man: Zum Netz ① gehören a) e) f) h)

Zu ② gehören dann b), c) d) g)



1. Würfel d) liefert ○
2. Würfel c) liefert ●
3. Würfel b) liefert □, *