Reimund Albers Geometrie erleben SoSe 06

# Übung 8 Lösungsskizzen

1. Verbesserte Aussagen:

   a. Bei Spiegelungen ist die Strecke Punkt-Bildpunkt orthogonal zur Spiegelungsachse

   b. Bei einer Geradenspiegelung werden Geraden wieder auf Geraden abgebildet. Gerdenspiegelungen sind längentreu.

   c. Die Spiegelung ist eine Kongruenzabbildung, die die Ebene auf sich abbildet.

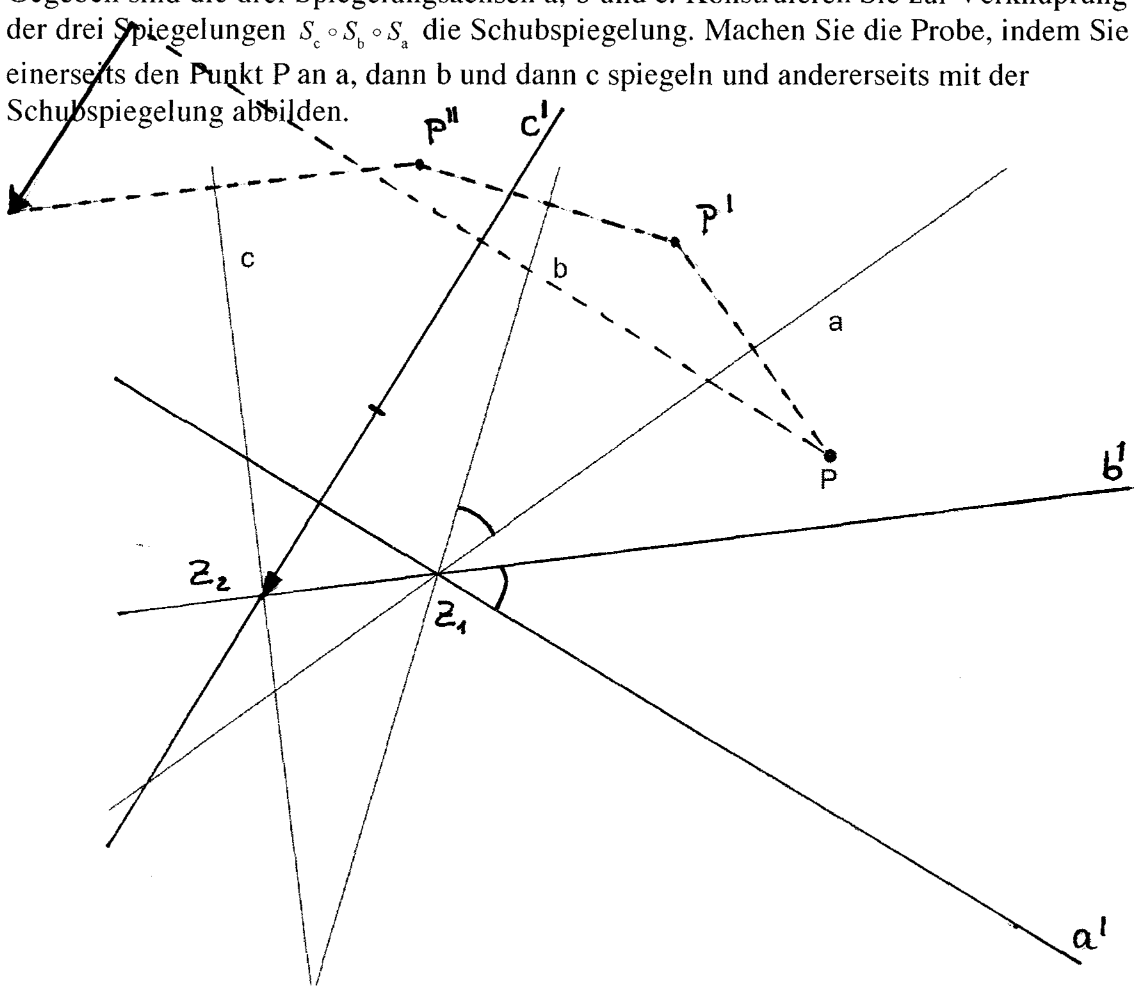
   d. $\alpha = \beta$, denn beide sind entsprechende Winkel von kongruenten Dreiecken

   e. „Eine Spiegelung .... " oder „Die Spiegelung bildet den ..."

   f. Die Strecke Punkt-Bildpunkt verläuft senkrecht zur Achse" (siehe a.)

---

2. Gegeben sind die drei Spiegelungsachsen a, b und c. Konstruieren Sie zur Verknüpfung der drei Spiegelungen $S_c \circ S_b \circ S_a$ die Schubspiegelung. Machen Sie die Probe, indem Sie einerseits den Punkt P an a, dann b und dann c spiegeln und andererseits mit der Schubspiegelung abbilden.



3a. $S_b \circ S_a = D_{Z,\alpha}$ mit $Z = a \wedge b$

und $\alpha = 2 \cdot \measuredangle a,b$

Für den Drehsinn wird die Achse der ersten Spiegelung, hier $a$, auf die Achse der zweiten Spiegelung, hier $b$, gedreht.

$S_a \circ S_b = D_{Z',\beta}$ mit $Z' = b \wedge a$ also $Z' = Z$

Das Drehzentrum bleibt gleich.

$\beta = 2 \cdot \measuredangle b,a$. Der Drehsinn ist entgegengesetzt zum Drehsinn von $\alpha$, der Betrag ist gleich.

Also $\beta = -\alpha$

Also $S_b \circ S_a = D_{Z,\alpha} \Rightarrow S_a \circ S_b = D_{Z,-\alpha}$

b. i) $a \perp b \Rightarrow S_a \circ S_b = S_b \circ S_a$

$a \perp b \Rightarrow \measuredangle a,b = 90° \Rightarrow S_a \circ S_b = D_{Z,-180°}$ mit $Z = a \wedge b$

und $S_b \circ S_a = D_{Z,180°}$

Eine Drehung um $180°$ und um $-180°$ (gleiches Drehzentrum) sind dieselbe Abbildung. Also $S_a \circ S_b = S_b \circ S_a$

q.e.d.

ii) $S_a \circ S_b = S_b \circ S_a \Rightarrow a \perp b$

in a. haben wir gezeigt, dass beim Vertauschen der Spiegelungen zwei Drehungen entstehen mit entgegengesetztem Drehsinn. $D_{Z,\alpha} = D_{Z,-\alpha} \Rightarrow \alpha \equiv -\alpha \mod 360°$

$\Rightarrow 2\alpha \equiv 0 \mod 360°$ D.h. $2\alpha$ ist ein Vielfaches von $360°$. $2\alpha = 0°$ ist wegen $a \neq b$ nicht möglich

$2\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 180° \Rightarrow |\measuredangle a,b| = 90° \Rightarrow a \perp b$

$2\alpha = 720° \Rightarrow \alpha = 360° \Rightarrow |\measuredangle a,b| = 180°$ $\lightning$ zu $a \neq b$

allgemein $2\alpha = k \cdot 360°$ $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha = k \cdot 180° \Rightarrow |\sphericalangle a,b| = k \cdot 90°$$

für $k$ gerade ergibt sich ein Vielfaches von $180°$ $\lightning$ $a \neq b$

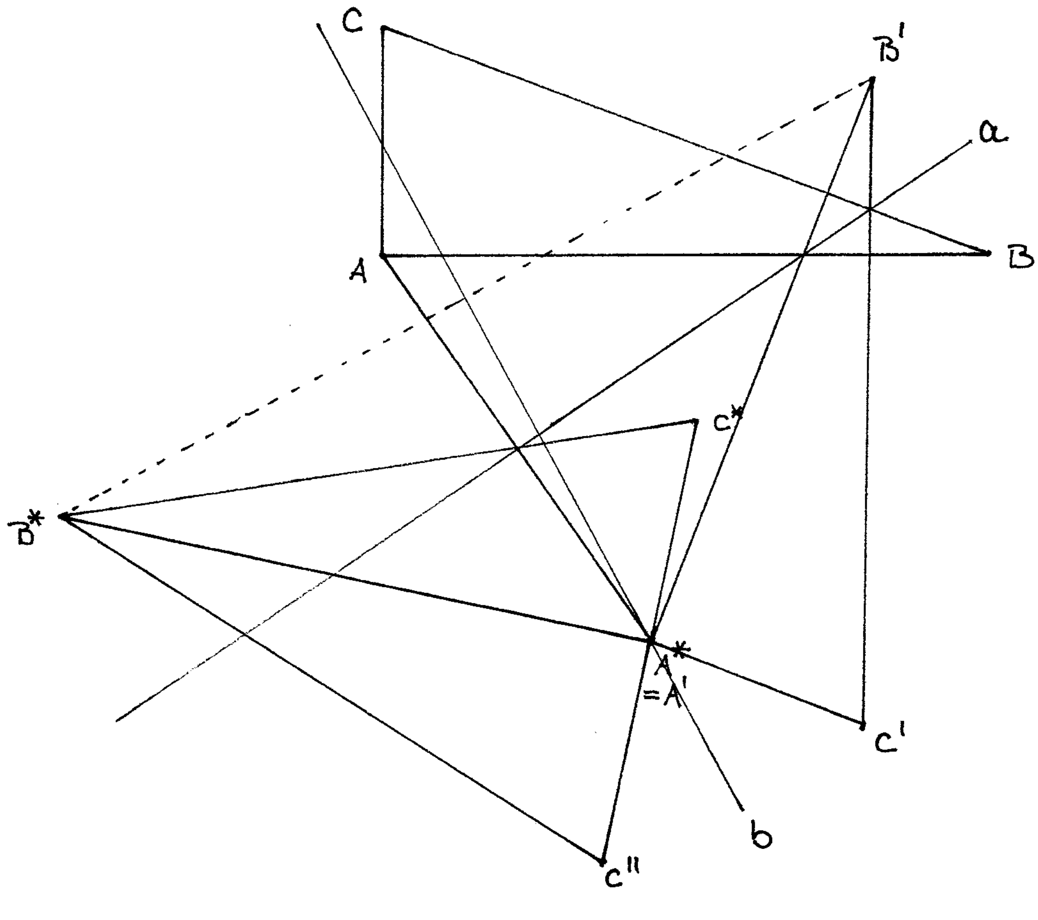
für $k$ ungerade ergibt sich $|\sphericalangle a,b| = 90° + k' \cdot 180°$ $k' \in \mathbb{N}$

also $a \perp b$ q.e.d.

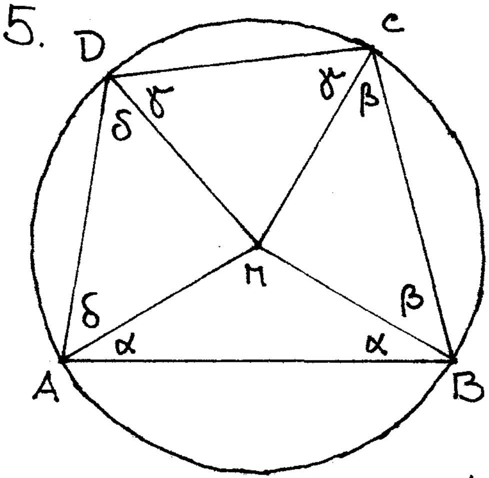
4. Als erste Achse $a$ wähle ich die Mittelsenkrechte von $\overline{AA^*}$. Das Dreieck $ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$ mit $A' = A^*$

Als zweite Achse $b$ wähle ich die Mittelsenkrechte von $\overline{B'B^*}$. $\Delta A'B'C' \rightarrow \Delta A''B''C''$ mit $B'' = B^*$. Da $b$ durch $A^*$ verläuft, gilt $A'' = A' = A^*$.

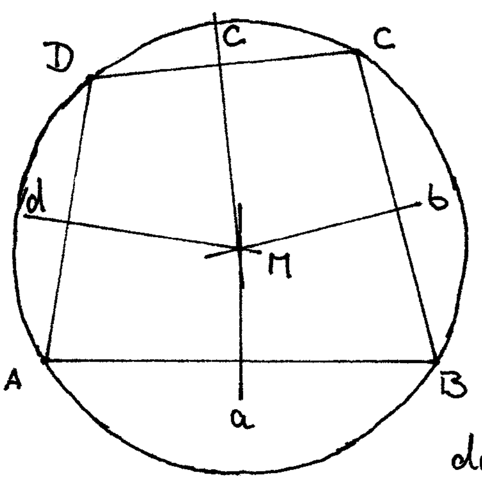
Als dritte Achse $c$ wähle ich die Mittelsenkrechte von $\overline{C''C^*}$. Das ist die Gerade $A^*B^*$. Also bleiben $A^*$ und $B^*$ beim Spiegeln an $c$ fest, $C'' \rightarrow C^*$.



5.




a) Diese Gesetzmäßigkeit ist eine direkte Aussage des Peripheriewinkelsatzes.
Es geht aber auch direkt.
Da die Teildreiecke, die M als einen Punkt haben, gleichschenklig sind, gelten die eingezeichneten Regelmäßigkeiten in den Winkelgrößen. Dann ist die Summe von gegenüberliegenden Winkelgrößen $\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Die Winkelsumme im gesamten Viereck ist $2\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta = 360^\circ \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma+\delta = 180^\circ$ q.e.d.




b) Da die vier Spiegelachsen durch M verlaufen, ist
$S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a = D_{M,\alpha}$
M ist offensichtlich Fixpunkt.
A ist sicher auch Fixpunkt, denn $A \xrightarrow{S_a} B \xrightarrow{S_b} C \xrightarrow{S_c} D \xrightarrow{S_d} A$

c) Das bedeutet für die Drehung, dass $\alpha = 0^\circ$ ist.
Damit ist die Drehung aber die Identität

6. (90° gedreht)