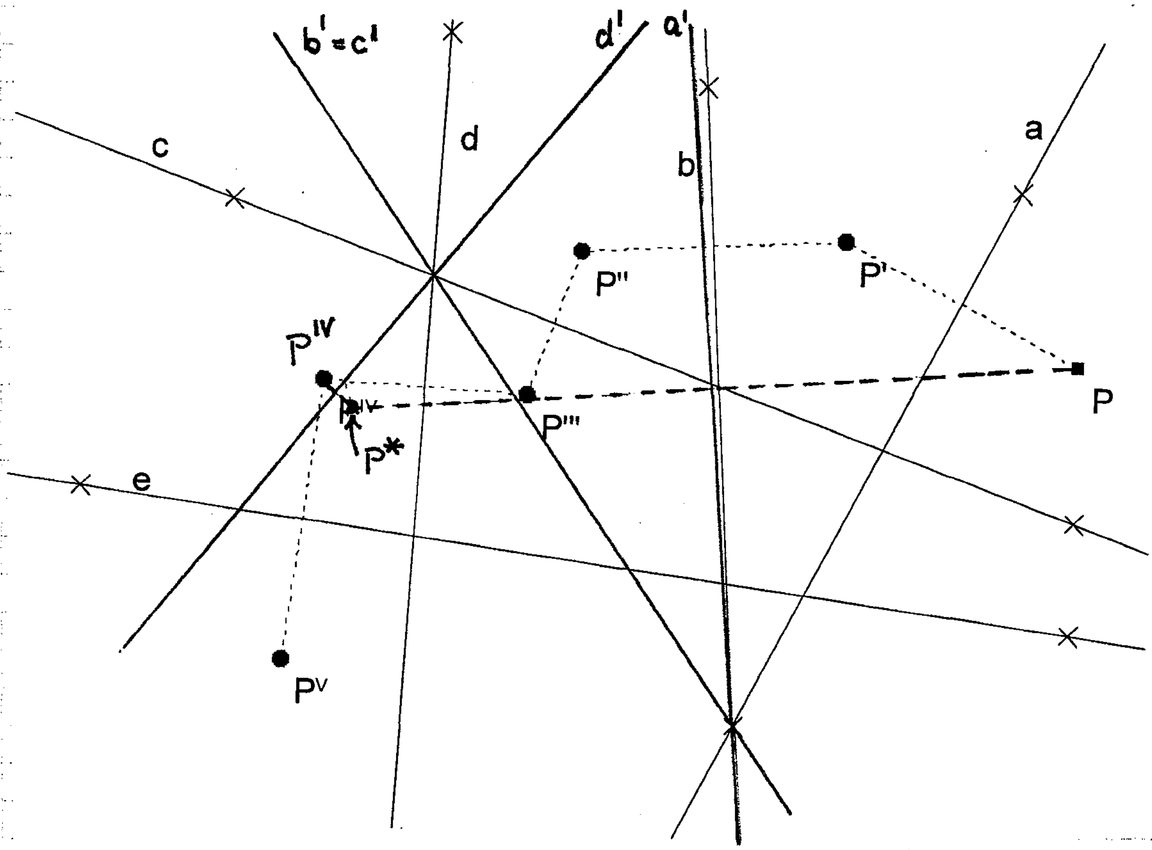
Reimund Albers   Geometrie erleben   SoSe 06

Übung 7   Lösungsskizzen

1.



Man verdreht a,b auf a'b' mit b' durch $c \cap d$

Man verdreht c,d auf c'd' mit $c' = b'$

$$\Rightarrow \; S_e \circ S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a = S_e \circ S_{d'} \circ \underbrace{S_{c'} \circ S_{b'}}_{id} \circ S_{a'} = S_e \circ S_{d'} \circ S_{a'}$$

Ein zweiter Weg (nicht gezeichnet) könnte sein, dass man d,e so verdreht, dass d' durch $b \cap c$ verläuft. Dann verdreht man b,c auf b',c' mit $c' = d'$

$$\Rightarrow \; S_e \circ S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a = S_{e'} \circ \underbrace{S_{d'} \circ S_{c'}}_{id} \circ S_{b'} \circ S_a = S_{e'} \circ S_{b'} \circ S_a$$

Man darf nur Geradenpaare verdrehen, deren zugehörige Spiegelungen direkt verknüpft sind. Nach S_a wird aber nicht direkt S_c ausgeführt. Also dürfen a und c nicht verdreht werden.

2. a) Da bei einer Drehung um Z für einen Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt: $|PZ| = |P'Z|$ muss Z von A und A' gleich weit entfernt sein. Also muss Z auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AA'}$ liegen. Ebenso für B und B' und C und C'. Also: Wenn es eine Drehung gibt, die ΔABC auf $\Delta A'B'C'$ abbildet, dann ~~A~~ müssen sich die drei Mittelsenkrechten von $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ in einem Punkt schneiden und dieser Punkt ist das Drehzentrum.

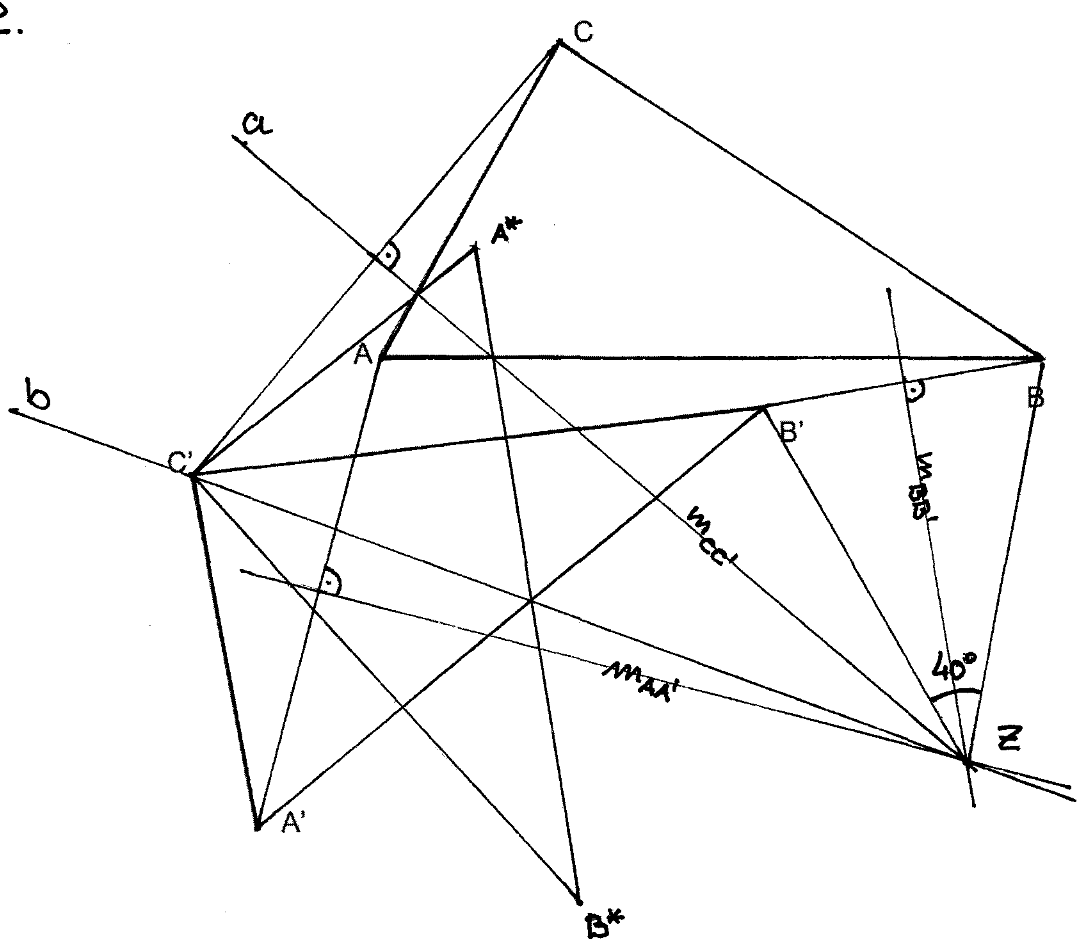
Nun verbindet man einen Punkt (z.B. B) mit Z und den zugehörigen Bildpunkt (z.B. B') mit Z und misst den Winkel (z.B. $\sphericalangle BZB'$). In der Zeichnung ist er 40°.

b) Ich wähle als erste Gerade die Mittelsenkrechte $m_{CC'}$ von $\overline{CC'}$. Die Spiegelung von ΔABC bildet es ab auf $\Delta A^*B^*C'$. Dann muss die zweite Spiegelungsachse die Gerade $C'Z$ sein. $m_{CC'}$ und $C'Z$ schließen einen Winkel von 20° ein.

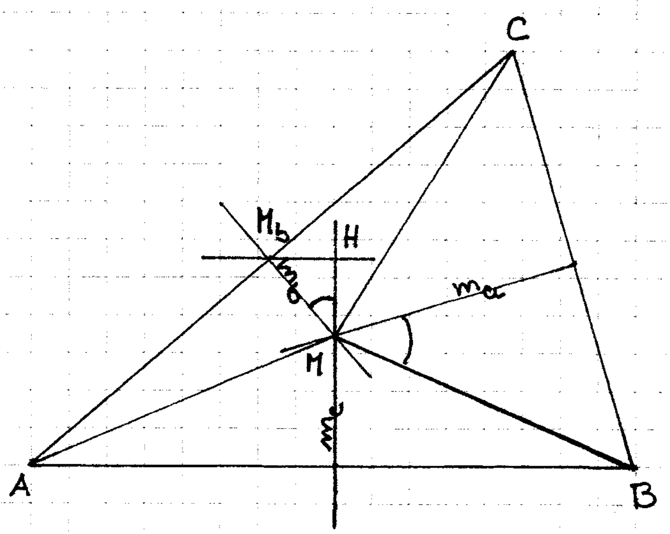
Allgemein muss man an zwei Achsen spiegeln, die a) beide durch Z verlaufen und b) einen Winkel von 20° einschließen.

Zeichnung →

zu 2.



3.



a) Hilfslinien $\overline{MA}$ und MC

Zeichnet man den Umkreis zum ΔABC, so ist $\sphericalangle BAC$ Peripheriewinkel und $\sphericalangle BMC$ Mittelpunktswinkel zur Sehne $\overline{BC}$. Also $|\sphericalangle BAC| \cdot 2 = |\sphericalangle BMC|$

Das ΔBMC ist gleichschenklig mit $|MB| = |MC|$. Also wird $\sphericalangle BMC$ von m_a halbiert.

Also $|\sphericalangle \overline{BM}, m_a| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$

b) Sei M_b der Mittelpunkt von $\overline{AC}$, h die Parallele zu AB durch M_b und $H = h \cap m_c$. Dann ist $|\sphericalangle H M_b C| = \alpha$, da Stufenwinkel an Parallelen. Also $|\sphericalangle M M_b H| = 90° - \alpha$ und

$|\sphericalangle H M M_b| = |\sphericalangle m_c, m_b| = \alpha$

c) i) $S_{m_c} \circ S_{m_b} \circ S_{m_a} = S_g$, denn die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt. Nach dem Drei-Spiegelungs-Satz sind sie dann durch eine Spiegelung ersetzbar.

ii) $S_{m_c} \circ S_{m_b} \circ S_{m_a}(M) = M$, denn M liegt auf jeder der drei Spiegelachsen.

$S_{m_c} \circ S_{m_b} \circ S_{m_a}(B) = B$, denn $S_{m_a}(B) = C$, $S_{m_b}(C) = A$ und $S_{m_c}(A) = B$

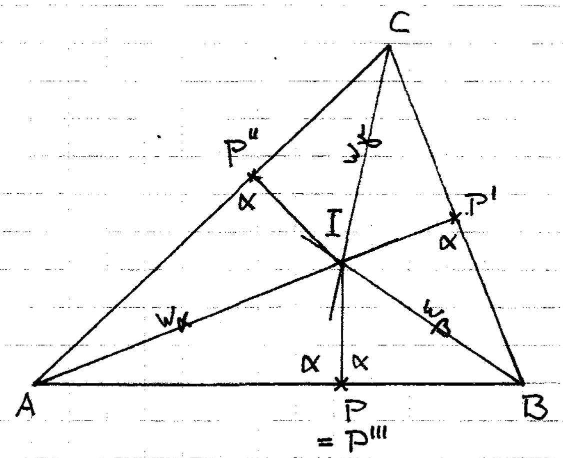
Wenn M und B Fixpunkte der resultierenden Spiegelung S_g sind, muss die Achse g durch M und B verlaufen, also $g = MB$

d) Es gilt also $S_{m_c} \circ S_{m_b} \circ S_{m_a} = S_{MB} \quad | \circ S_{m_a}$

$$\Rightarrow S_{m_c} \circ S_{m_b} = S_{MB} \circ S_{m_a}$$
$$\Rightarrow |\sphericalangle m_b, m_c| = |\sphericalangle m_a, MB|$$
$$\Rightarrow |\sphericalangle m_c, m_b| = |\sphericalangle MB, m_a|$$

In b) haben wir gefunden $|\sphericalangle m_c, m_b| = \alpha$ Also $|\sphericalangle MB, m_a| = \alpha$, was wir in a) schon gefunden hatten.

4.



a) Gilt $P = P'''$, so ist P der Fußpunkt des Lotes von I auf AB. Entsprechendes gilt für die Punkte P' und P''

Begründung: Da Spiegelungen winkeltreu sind, gilt: $|\sphericalangle BPI| = |\sphericalangle IP'B| = |\sphericalangle AP''I| = |\sphericalangle IP'''A| = \alpha$ Gilt $P = P'''$ so sind $\sphericalangle BPI$ und $\sphericalangle IP'''A$ Nebenwinkel, also $2\alpha = 180°$

$\Rightarrow \alpha = 90°$

4b) (analog zu 3c)

Der Schnittpunkt I der Winkelhalbierenden ist Fixpunkt von $S_{w_\alpha} \circ S_{w_\gamma} \circ S_{w_\beta}$. Ebenso P, wenn gilt $P = P'''$. Also muss IP $(\perp AB)$ die Achse der resultierenden Spiegelung sein

5. A: $3^3 = 27$ B: $4^3 = 64$ C: $5^3 = 125$

allgemein n^3

Drei rote Flächen: Die Würfel an den Ecken.

Das sind unabhängig von n immer 8

Zwei rote Flächen: Die Würfel entlang der Kanten (12)

Das sind allgemein $(n-2) \cdot 12$

also A: 12 B: 24 C: 36

Eine rote Fläche: Die Würfel in den Flächen (6)

Das sind allgemein $(n-2)^2 \cdot 6$

also A: 6 B: 24 C: 54

Keine rote Fläche: Die Würfel im Inneren

Das sind allgemein $(n-2)^3$

also A: 1 B: 8: C: 27

Proben: A: $8 + 12 + 6 + 1 = 27$ ✓

B: $8 + 24 + 24 + 8 = 64$ ✓

C: $8 + 36 + 54 + 27 = 125$ ✓

allgem: $8 + (n-2) \cdot 12 + (n-2)^2 \cdot 6 + (n-2)^3$

$= 8 + 12n - 24 + 6n^2 - 24n + 24 + n^3 - 6n^2 + 12n - 8$

$= n^3$ ✓