Reimund Albers, Geometrie erleben, Modul EM1.2

5./6. Übung, Lösungsskizzen

1. a) Vorauss. $|AT_0| = a_0 \quad |T_0B| = b_0 \quad |AB| = 1$

$$\frac{a_0}{1} = \frac{b_0}{a_0} \qquad \text{also} \quad a_0^2 = b_0$$

Behaupt.: $|AT_1| = a_1 = b_0 \quad |T_1T_0| = b_1$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1}{a_1}$$

Beweis: (auf Schmierzettel gerechnet, hier „logisch" aufgeschrieben, also „rückwärts")

$a_0 + b_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad b_0 = 1 - a_0 \quad | \cdot b_0 \quad \Rightarrow \quad b_0^2 = b_0 - a_0 b_0$

mit Vorauss. $b_0 = a_0^2 \quad \Rightarrow \quad b_0^2 = a_0^2 - a_0 b_0 = a_0(a_0 - b_0)$

mit $b_1 = a_0 - b_0 \quad \Rightarrow \quad b_0^2 = a_0 b_1$

mit $a_1 = b_0 \quad \Rightarrow \quad a_1^2 = a_0 b_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a_1}{a_0} = \dfrac{b_1}{a_1}$ q.e.d.

b) Man erhält folgende Folgen

			Anzahl „a"	„b"
1.	ab	$= w_1$	1	1
2.	aba	$= w_2$	2	1
3	abaab	$= w_3$	3	2
4.	abaababa	$= w_4$	5	3
5.	abaababaabaab	$= w_5$	8	5

↓ ↓ Fibonacci-Zahlen

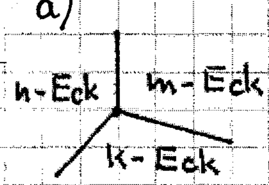
Für die Zeichenketten gilt

$$w_{n+1} = \underbrace{w_n w_{n-1}}_{\text{Aneinanderhängen}}$$

Beim Übergang $w_n \to w_{n+1}$ gelten Ersetzungsregeln: $a \to ab \quad b \to a$

Ein Major wird zerlegt in Major und Minor, ein Minor wird Major

2 a) 2



Ecke im n-Eck: $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$

Ecke im m-Eck: $\frac{m-2}{m} \cdot 180^\circ$

Ecke im k-Eck: $\frac{k-2}{k} \cdot 180^\circ$

Wenn die Ecken lückenlos zusammenpassen sollen, muss die Summe 360° ergeben. Also

$$\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ + \frac{m-2}{m} \cdot 180^\circ + \frac{k-2}{k} \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

b) Division durch 180°

$$\frac{n-2}{n} + \frac{m-2}{m} + \frac{k-2}{k} = 2 \qquad \text{Zerlegen der Brüche}$$

$$1-\frac{2}{n} + 1-\frac{2}{m} + 1-\frac{2}{k} = 2 \qquad |-3$$

$$-\frac{2}{n} - \frac{2}{m} - \frac{2}{k} = -1 \qquad |\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \qquad |-\frac{1}{m}-\frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{k} = \frac{mk-2k-2m}{2mk} \qquad |\text{Kehrwert}$$

$$n = \frac{2mk}{mk-2k-2m} = \frac{2k\cdot m}{(k-2)\cdot m - 2k}$$

Probieren: $k=3 \Rightarrow n = \frac{6m}{m-6}$

$m \geq 7$, da sonst n negativ

$m-6$ Teiler von 6: $m-6=1 \Rightarrow m=7,\ n=42$

$m-6=2 \Rightarrow m=8,\ n=24$

$m-6=3 \Rightarrow m=9,\ n=18$

$m-6=6 \Rightarrow m=12,\ n=12$

$m-6=2^2 \Rightarrow m=10 \quad n=15$

$m-6=3^2 \Rightarrow m=15 \quad n=10$

$m-6=6^2 \Rightarrow m=42 \quad n=7$

Probieren: $k = 4 \Rightarrow n = \frac{8m}{2m-8} = \frac{4m}{m-4}$

$m \geq 5$, $m-4$ Teiler von 4:

$m - 4 = 1 \Rightarrow m = 5 \quad n = 20$

$m - 4 = 2 \Rightarrow m = 6 \quad n = 12$

$m - 4 = 4 \Rightarrow m = 8 \quad n = 8$

$m - 4 = 4^2 \Rightarrow m = 20 \quad n = 5$

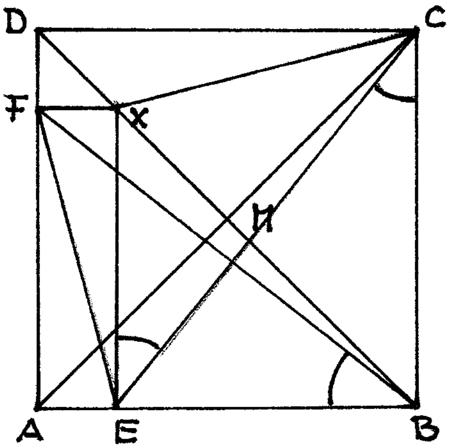
Weitere Lösungen

$k = 5 \quad m = 5 \quad n = 10$

$k = 6 \quad m = 6 \quad n = 6$

d) Ist eine Eckenzahl ungerade und sind die anderen beiden Eckenzahlen verschieden, so ist eine durchgängig regelmäßige Parkettierung nicht möglich

HAUSÜBUNGEN



3

a) b) $\Delta AEC \quad \Delta DFB$

$|AC| = |DB|$ da Diagonalen des Quadrats

$|\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle FDB| = 45°$

$|AE| = |DF| = |XF|$ da gegenüber liegende Seiten im Recht. bzw. da ΔFXD halbes Quadrat

$\Rightarrow \Delta AEC \cong \Delta DFB$ nach SWS

also gilt auch $|\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle DBF| = \gamma$ und $|EC| = |FB|$

c) Betrachte ΔECX und ΔEBF

$|EX| = |EB|$, da ΔEBX halbes Quadrat

$|EC| = |BF|$ nach Aufg b

3c) Forts. $|\sphericalangle XEC| = |\sphericalangle EBF| = 45^\circ - \gamma$

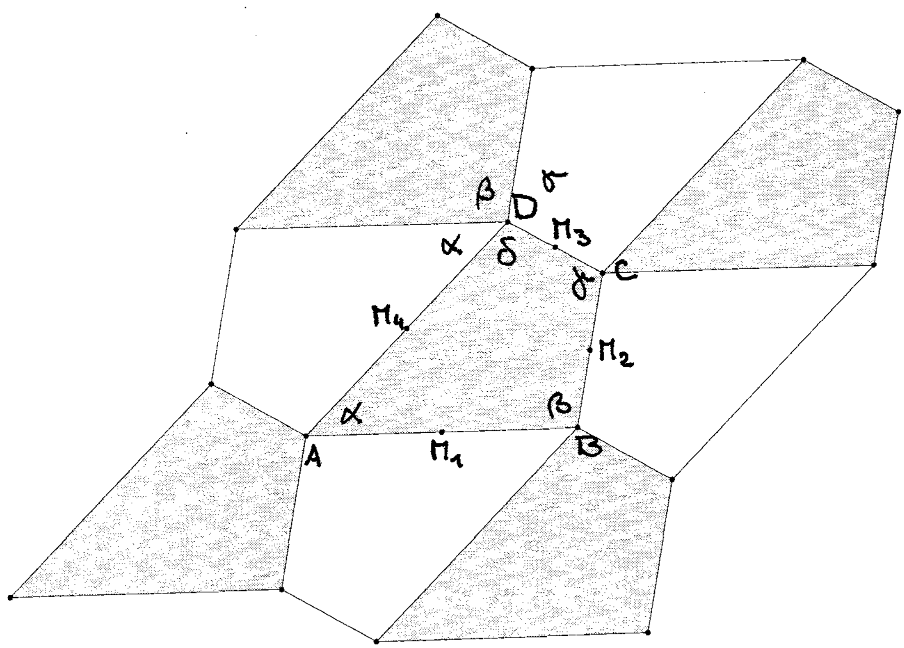
$\overset{\shortparallel}{|\sphericalangle ECB|}$ da Wechselwinkel

$\Rightarrow \triangle ECX \cong \triangle EBF$ nach SWS

Also sind $|XC| = |EF|$.

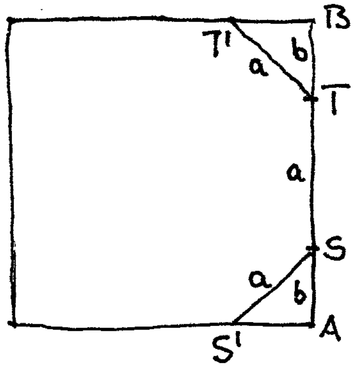
<u>Alternative:</u> Fällt man von X das Lot auf BC, Fußpunkt G, und das Lot auf CD, Fußpunkt H, so ist $\square$ XGCH ein Rechteck, das kongruent zum Rechteck AEXF ist. Darin sind $\overline{XC}$ bzw. $\overline{EF}$ Diagonalen, also gleich lang.

4



Das Ausgangsviereck ABCD wird an den 4 Seitenmitten um 180° gedreht. (ergibt die vier weißen Vierecke) Verschiebt man das Ausgangsviereck jeweils um eine Diagonale, so erhält man eine Parkettierung der Ebene. In jedem Knoten kommen die vier Winkel α, β, γ und δ des Vierecks zusammen.

5



Bezeichnungen

$|TB| = |SA| = |T'B| = |S'A| = b$

$|ST| = a \qquad |AB| = 1$

Damit ein reguläres Achteck entsteht, muss gelten: $|SS'| = |TT'| = a$

Pythagoras: $2b^2 = a^2$ ①

Kante des Quadrats: $a + 2b = 1$

$\Rightarrow 2b = 1 - a \Rightarrow 4b^2 = (1-a)^2$ mit ① gilt

$4b^2 = \underline{2a^2 = (1-a)^2 = 1 - 2a + a^2}$

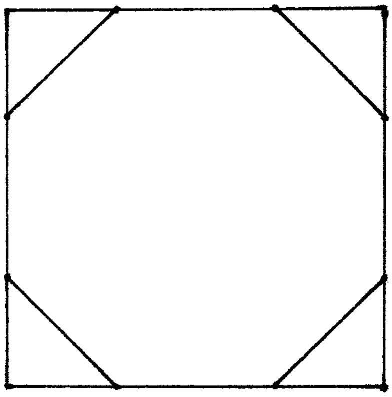
$a^2 + 2a - 1 = 0 \qquad a = -1 \pm \sqrt{1+1} = \pm\sqrt{2} - 1$

Für das geometr. Problem ist $a = \sqrt{2} - 1$ die einzige Lös.

$\Rightarrow b = (1-a) \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Bei einer Kantenlänge von 5cm gilt

$a \approx 2{,}07$ cm $\qquad b \approx 1{,}46$ cm



6 a) $(D_{90} \circ S_{45}) \circ S_{90} = S_{90} \circ S_{90} = D_0$

$D_{90} \circ (S_{45} \circ S_{90}) = D_{90} \circ D_{270} = D_0$

$(S_0 \circ S_{135}) \circ D_{180} = D_{90} \circ D_{180} = D_{270}$

$S_0 \circ (S_{135} \circ D_{180}) = S_0 \circ S_{45} = D_{270}$

$(D_{90} \circ S_{135}) \circ D_{270} = S_0 \circ D_{270} = S_{45}$

$D_{90} \circ (S_{135} \circ D_{270}) = D_{90} \circ S_0 = S_{45}$

b) $X \circ D_{90} = S_0 \qquad X = S_{45}$

$D_{90} \circ X = S_0 \qquad X = S_{135}$

$\rightarrow$

$$D_{180} \circ X \circ D_{90} = S_{45} \quad | \; D_{180} \circ$$

$$X \circ D_{90} = D_{180} \circ S_{45} = S_{135} \quad | \circ D_{270}$$

$$X = S_{135} \circ D_{270} = S_0$$

$$X = S_0$$

Probe: $D_{180} \circ S_0 \circ D_{90} = D_{180} \circ S_{135} = S_{45}$ ✓

7. a) Das neutrale Element ist 0, denn für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $a + 0 = 0 + a = 0$

b) Zu jedem Element $a \in \mathbb{Z}$ ist $-a$ das inverse, denn $a + (-a) = (-a) + a = 0$

c) $\mathbb{Z}$ mit $-$

1) Abgeschlossenheit ist erfüllt. Die Subtraktion von zwei ganzen Zahlen ergibt wieder eine ganze Zahl

2) Assoziativitätsgesetz ist nicht erfüllt

$$5 - (1 - 3) = 5 - (-2) = 7$$
$$(5 - 1) - 3 = 4 - 3 = 1 \quad \#$$

3) neutrales Element gibt es, ist die Null, denn für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a - 0 = a$ aber nicht $0 - a$, denn das ist $-a$

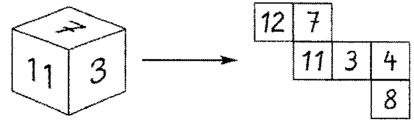
4) inverses Element gibt es. Jedes Element ist zu sich selbst invers. $a - a = 0$

8.

7

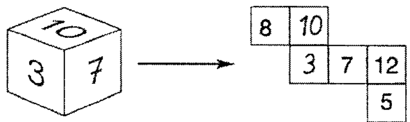
Würfel-augen

Die Summe der Zahlen auf gegenüberliegenden Seiten ist immer 15.

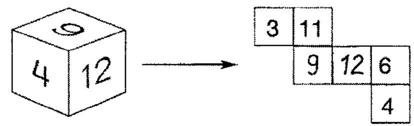


Trage die richtigen Zahlen an der richtigen Stelle in das Netz ein.

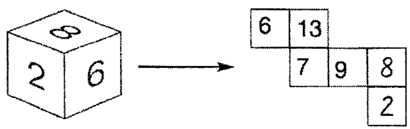
1



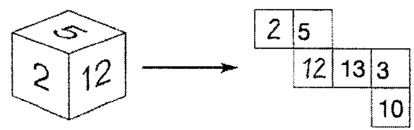
2



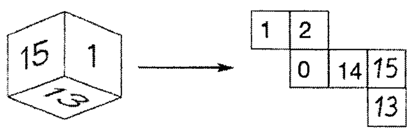
3



4



5



6