Reimund Albers, Geometrie erleben, Modul EM 1.2
3. Übung, Lösungsskizzen

1. „roter Faden": über Kongruenzsätze beweist man $|EF| = |FG|$, $|EF| = |GH|$, $|EF| = |HE|$.
Dann muss man noch nachweisen, dass die vier Innenwinkel $\sphericalangle HEF$, $\sphericalangle EFG$, $\sphericalangle FGH$ und $\sphericalangle GHE$ $90°$ groß sind

Beweis von $\triangle EBF \cong \triangle FCG$ ($|EF| = |FG|$ über)

$|BF| = |CG|$ nach Vorauss. / Konstruktion

$|EB| = |FC|$ die „Reststrecken" sind auch gleich lang

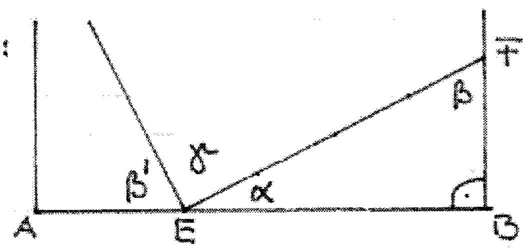
$|\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle FCG| = 90°$, da Winkel des Quadrats

$\Rightarrow$ $\triangle EBF \cong \triangle FCG$ nach SWS

$\Rightarrow$ $|EF| = |FG|$ q.e.d.

Analog zeigt man die Gleichheit mit den anderen Seiten

Winkel:



$\beta = \beta'$, da es entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken sind.

$\alpha + \beta + 90° = 180°$ Winkelsumme im $\triangle EBF$

$\Rightarrow \alpha + \beta' + \boxed{90°} = 180°$ $\beta = \beta'$ eingesetzt

$\alpha + \beta' + \boxed{\gamma} = 180°$ da AB gerade Linie

Vergleich liefert $\gamma = 90°$

Sind im Viereck EFGH die vier Seiten gleich lang und ein Winkel $90°$ groß, so ist EFGH ein Quadrat.

2. „roter Faden": über Kongruenzsätze, zunächst SWS, dann WSW, beweist man schrittweise, dass $\Delta EBF \cong \Delta FCG \cong \Delta GDH \cong \Delta HAE$. Daraus folgt, dass $|EF| = |FG| = |GH| = |HE|$. Dann muss man noch für wenigstens einen Winkel zeigen, dass er $90°$ groß ist. Das geschieht genau so wie in Aufgabe 1.

i. $\Delta EBF \ (\cong) \ \Delta FCG$

$|EB| = |FC|$, da $|EB| = \overbrace{|AB|}^{} - \overbrace{|AE|}^{}$ und $|FC| = \overbrace{|BC|}^{} - \overbrace{|BF|}^{}$ (gleich)

$|\sphericalangle FBE| = |\sphericalangle GCF| = 90°$ Ecke des Quadrats

$|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle CFG|$ nach Konstruktion

$\Rightarrow \Delta EBF \cong \Delta FCG$ nach WSW

Folgerung $|BF| = |CG|$

ii. $\Delta FCG \cong \Delta GDH$ zeigen über WSW

Folgerung $|GC| = |DH|$

iii. $\Delta GDH \cong \Delta HAE$ zeigen über SWS

HAUSÜBUNGEN

3. EFGH ist ein Parallelogramm, wenn gegenüber liegende Seiten parallel sind. Dazu zeige ich, dass die Winkel $\sphericalangle BEF$ und $\sphericalangle DGH$ gleich groß sind.

$\Delta EBF \quad \Delta GDH$

$|BF| = |DH|$ laut Voraussetzung

$|EB| = |GD|$ da $|EB| = |AB| - |AE|$

$|GD| = |CD| - |GD|$ (jeweils gleich)

$|\sphericalangle FBE| = |\sphericalangle HDG| = 90°$, Ecke des Rechtecks

$\Rightarrow \Delta EBF \cong \Delta GDH$ nach SWS

$\Rightarrow |\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle DGH|$ und da $AB \parallel CH$ gilt auch $EF \parallel GH$

analog zeigt man $\Delta AEH \cong \Delta FCG$

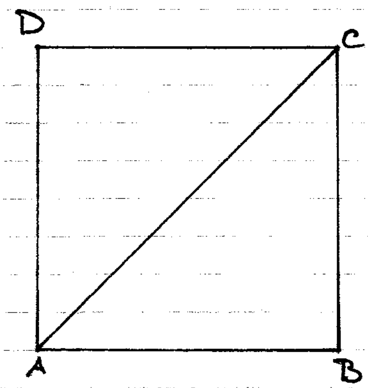
$\Rightarrow |\sphericalangle AHE| = |\sphericalangle CFG|$ und da $AD \parallel BC$

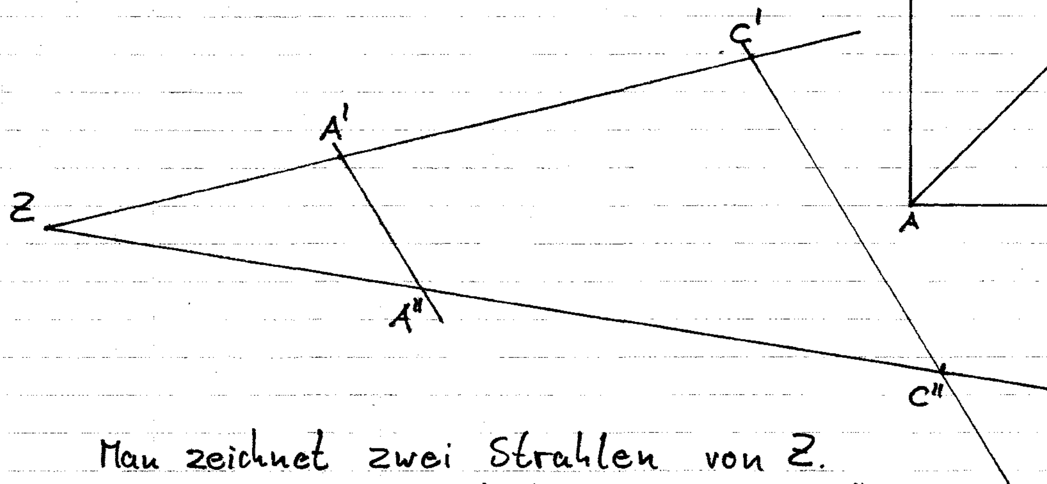
$\Rightarrow EH \parallel FG$

Also ist $EFGH$ ein Parallelogramm

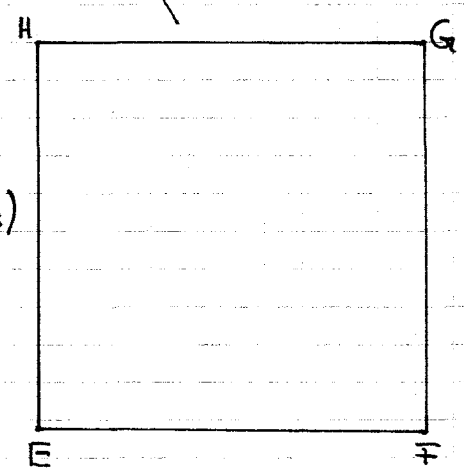
4. a) Da alle Quadrate zueinander ähnlich sind, ist das Verhältnis der Seiten und Diagonalen gleich.

Beliebiges Quadrat ABCD mit Diagonale





Man zeichnet zwei Strahlen von Z.
Auf dem einen ~~trägt~~ zeichnet man A' ~~ein~~
mit $|ZA'| = |AB|$ (Quadratseite)
und C' mit $|A'C'| = |AC|$ (Diagonale)
Auf dem anderen Strahl zeichnet man nun C'' mit $|ZC''| = 12$ cm.
Man zeichnet durch A' die Parallele zu $C'C''$. Schnitt mit ZC'' ist A''.



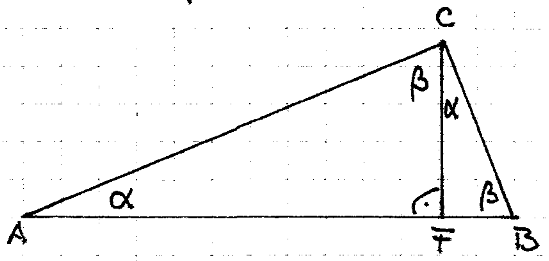
Dann ist $|ZA''|$ die gesuchte Quadratseitenlänge und $|A''C''|$ die Länge der Diagonalen.

b) Diagonale im Quadrat mit Kantenlänge a: $d = a\sqrt{2}$

Also $a + d = 12 \Rightarrow a(1+\sqrt{2}) = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{1+\sqrt{2}} \approx 4{,}97$
≈ 5

a muss etwa 4,97 cm lang sein

5 a) Nach dem Satz über ähnliche Dreiecke genügt es, zu zeigen, dass entsprechende Winkel gleich groß sind.



Da $|\sphericalangle ACB| = 90°$, gilt

$\alpha + \beta = 90°$

α liegt auch im ΔAFC

und $|\sphericalangle CFA| = 90° \Rightarrow |\sphericalangle ACF| = \beta$

$\Rightarrow |\sphericalangle FCB| = 90° - \beta = \alpha$

Damit sind in den drei Dreiecken ΔABC, ΔAFC und ΔFBC die Winkel α, β und $90°$ groß.

$\Rightarrow$ Sie sind ähnlich

b)

$\Delta ABC \sim \Delta AFC$	$\Delta ABC \sim \Delta FBC$
$\frac{a}{h} = \underbrace{\frac{b}{q} = \frac{c}{b}}$	$\frac{a}{p} = \frac{b}{h} = \frac{c}{a}$
$b^2 = c \cdot q$	$a^2 = c \cdot p$

$$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c(p+q) = c \cdot c$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

q.e.d.

6. Jede Ecke des Fußballs enthält genau eine Fünfeck-Ecke. $\underset{\text{Fünfecke}}{12} \cdot \underset{\text{Ecken}}{5} = \underline{\underline{60 \text{ Ecken}}}$

Flächenkanten: $12 \cdot 5 = 60$ (Fünfecke)
$20 \cdot 6 = 120$ (Sechsecke)
$\overline{180}$

Je zwei Flächenkanten bilden eine (Körper)kante

also $\underline{\underline{90 \text{ Kanten}}}$