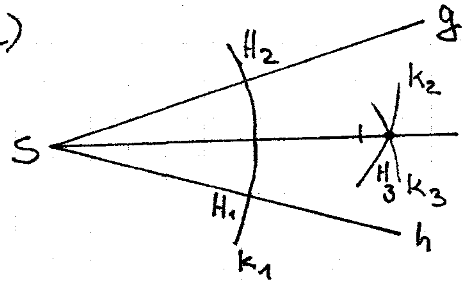
Reimund Albers, Geometrie erleben, Modul EM1.2

2. Übung, Lösungsskizzen

PRÄSENZÜBUNGEN

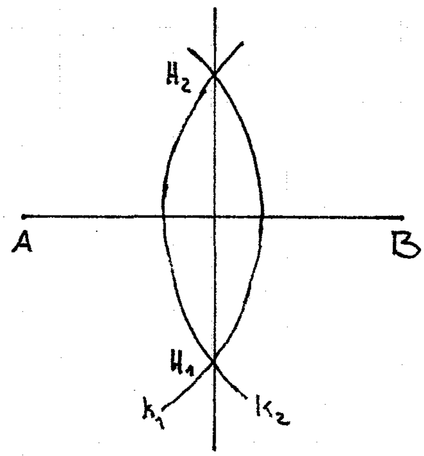
1. a)



1. Kreis um S mit r_1 beliebig $\to k_1$
2. $H_1 = k_1 \cap h$, $H_2 = k_1 \cap g$
3. Kreis um H_1 mit r_2 beliebig $\to k_2$
   Kreis um H_2 mit $\overset{\shortparallel}{r_2} \to k_3$
4. $H_3 = k_2 \cap k_3$

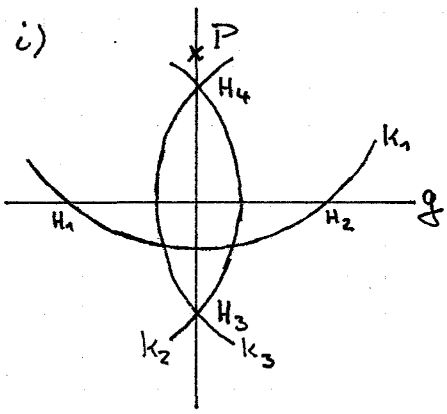
SH_3 ist die gesuchte Winkelhalbierende

b)



1. Kreis um A mit r_1 beliebig* $\to k_1$
2. Kreis um B mit $\overset{\shortparallel}{r_1} \to k_2$
   * aber $r_1 > \frac{1}{2}|AB|$
3. $k_1 \cap k_2 = \{H_1, H_2\}$
4. H_1H_2 ist die gesuchte Mittelsenkrechte

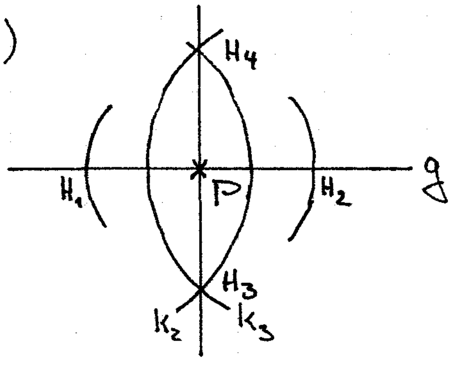
c) i)



1. Kreis um P mit r_1 beliebig, aber $r_1 > d(P, g)$
2. $g \cap k_1 = \{H_1, H_2\}$
3. Kreis um H_1 mit $r_2 > \frac{1}{2}|H_1H_2| \to k_2$
4. Kreis um H_2 mit $r_2 \to k_3$
5. $k_2 \cap k_3 = \{H_3, H_4\}$

H_3H_4 ist das gesuchte Lot durch P

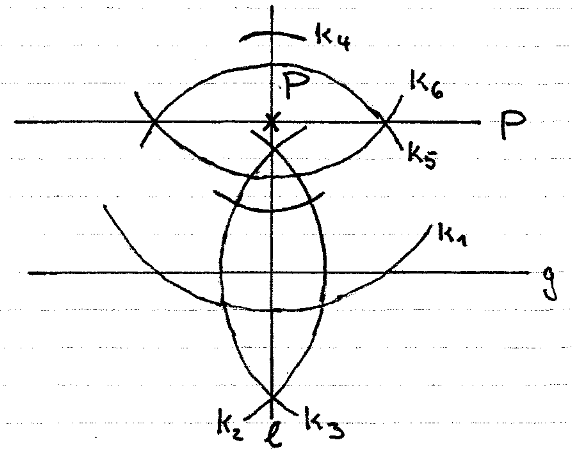
ii)



1. Kreis um P mit r_1 beliebig $\to k_1$
2. $g \cap k_1 = \{H_1, H_2\}$

Schritte 3. - 5. wie oben bei c) i)

1d)



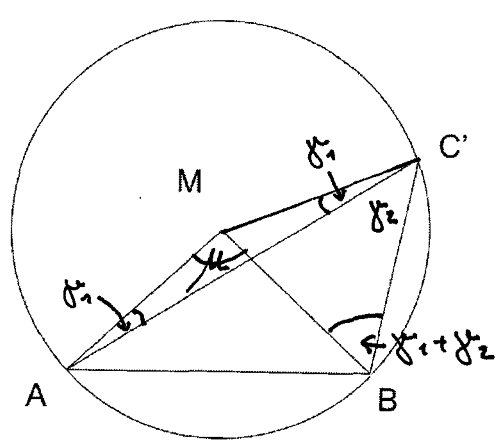
1. Man konstruiert das Lot durch P, senkrecht zu g (Kreise k_1, k_2, k_3) Lot ℓ

2. Man konstruiert das Lot durch P, senkrecht zu ℓ (Kreise k_4, k_5, k_6) Lot p

~~Das~~ Die Gerade p ist die gesuchte ~~Gerade~~ Parallele

HAUSÜBUNGEN

2.



Wir bezeichnen wieder wie in der Vorlesung

$|\sphericalangle AMB| = \mu$

$|\sphericalangle MC'A| = \gamma_1$

$|\sphericalangle AC'B| = \gamma_2$

Zu zeigen ist nun, dass $\mu = 2\cdot\gamma_2$ ist für alle C' auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{BA}$ und für die M nicht in $\Delta ABC'$ liegt.

$\Delta MBC'$ gleichschenklig $\Rightarrow |\sphericalangle C'BM| = \gamma_1+\gamma_2$

und $|\sphericalangle BMC'| = 180^\circ - 2(\gamma_1+\gamma_2)$

$\Delta AC'M$ gleichschenklig $\Rightarrow |\sphericalangle C'AM| = \gamma_1$

und $|\sphericalangle AMC'| = 180^\circ - 2\gamma_1$

$$|\sphericalangle AMC'| = \begin{cases} 180^\circ - 2\gamma_1 \\ \mu + |\sphericalangle BMC'| = \mu + 180^\circ - 2(\gamma_1+\gamma_2) \end{cases}$$

also $180^\circ - 2\gamma_1 = \mu + 180^\circ - 2\gamma_1 - 2\gamma_2$

$\Rightarrow \quad 0 = \mu - 2\gamma_2$

$\Rightarrow \quad \mu = 2\gamma_2 \quad$ q. e. d.

3. Etwas Logik vorweg

Wir sollen beweisen $A \Rightarrow B$ mit

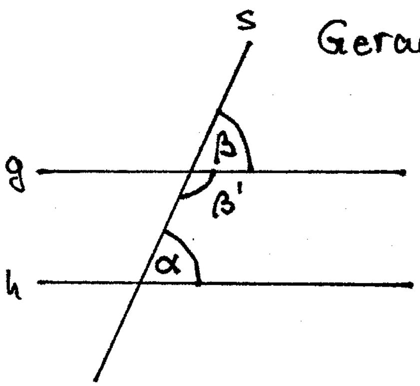
$A =$ „$g \parallel h$" und $B =$ „Stufenwinkel ... gleich groß"

Indirekter Beweis: Wir zeigen, dass $\neg(A \Rightarrow B)$ falsch ist. $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A$ und $\neg B$

Nun gibt es zu A die äquivalente Aussage A'

Also können wir auch zeigen: A' und $\neg B$ ist falsch

A' und $\neg B =$ „g und h haben keinen Schnittpunkt und die Stufenwinkel an einer schneidenden Geraden s sind verschieden"



Annahme: $\alpha \neq \beta$

$\Rightarrow \alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$

Wir betrachten $\alpha < \beta$

$\beta' = 180° - \beta$, da Nebenwinkel

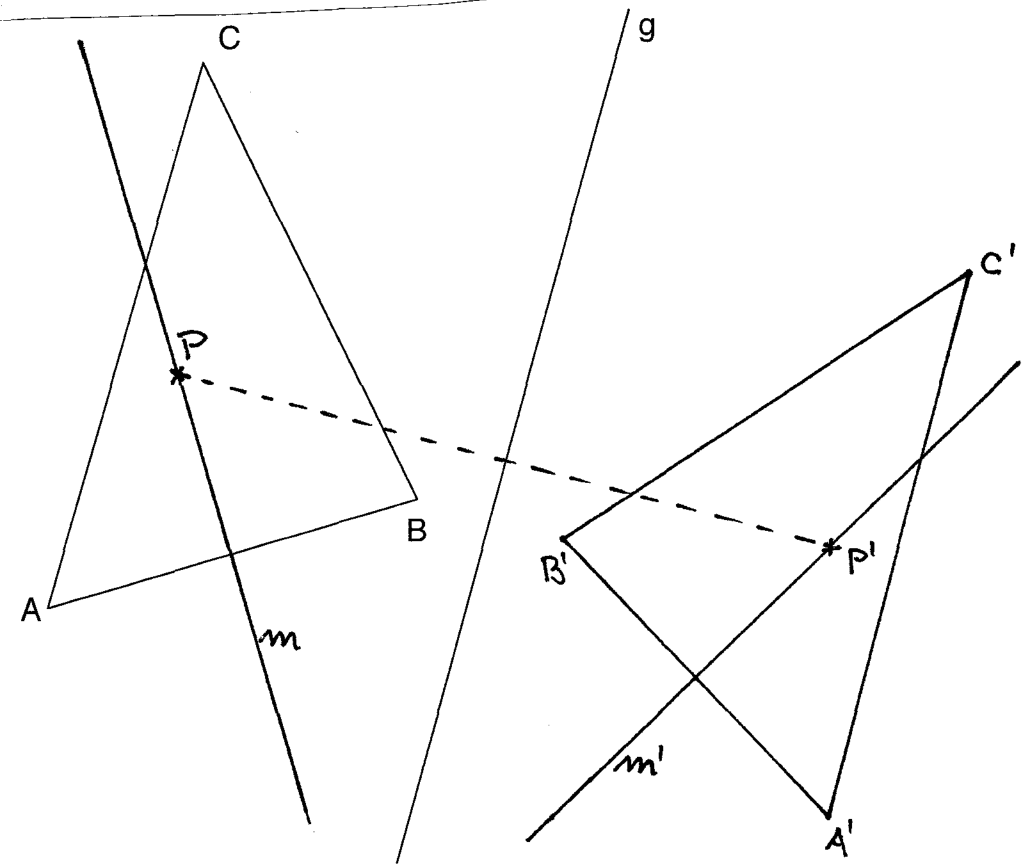
Dann ist $\alpha + \beta' = \alpha + 180° - \beta = 180° - \underbrace{(\beta - \alpha)}_{\text{positiv}}$

Also $\alpha + \beta' < 180°$

Damit gibt es einen Winkel mit der Größe $\gamma = 180° - (\alpha + \beta')$

Der wird von g und h gebildet, die sich „rechts" unter diesem Winkel treffen müssen. ↯ zu g und h haben keinen Schnittpunkt.

Für $\alpha > \beta$ zeigt man analog, dass sich g und h „links" schneiden.



A', B', C' sind die Spiegelbilder von A, B, C
m ist die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$, m' die von $\overline{A'B'}$
$P \in m$ Dann muß das Spiegelbild P' von P auf m' liegen.

6. Die 12 Fünfecke haben 60 Ecken. In jeder Körperecke kommen eine Fünfeck- und zwei Sechseck-Ecken zusammen. Also gibt es 120 Ecken der Sechsecke. Macht 120 : 6 = 20 Sechsecke.