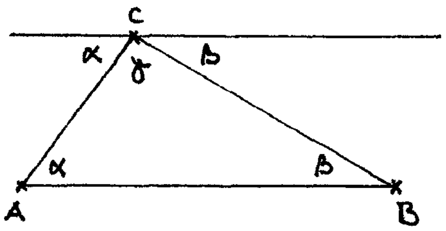
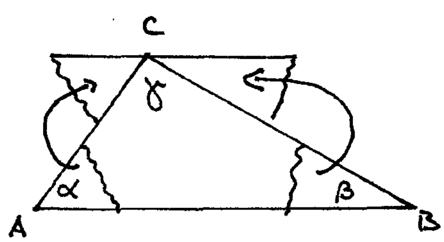
Reimund Albers, Geometrie erleben, Modul EM1.2
1. Übung, Lösungsskizzen

1) I) der klassische Beweis



Man zeichnet durch C eine Parallele zu AB. Der Beweis erfolgt über den Satz ~~von~~ von Stufen/Wechselwinkeln an Parallelen. Der Beweis ist a) exakt, b) seine Anschaulichkeit ist nur indirekt gegeben, da er auf der Anschaulichkeit der Gleichheit der Wechselwinkel beruht. c) Er ist nicht (in dieser Form) auf Vierecke erweiterbar

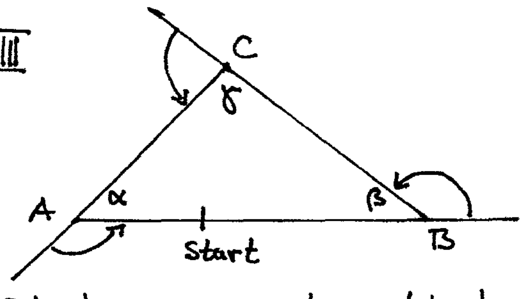
II) Experimentelle Begründung



Ein Dreieck wird aus Papier ausgeschnitten, die Ecken bei A und B abgerissen und bei C angelegt.

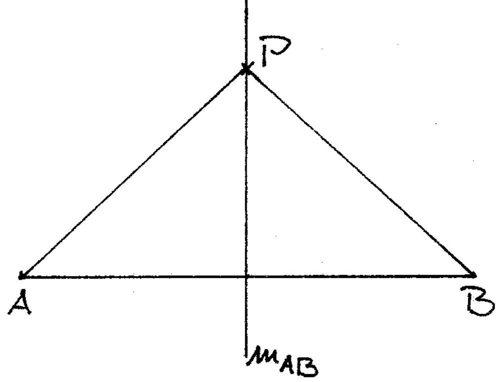
Der Beweis ist a) nicht exakt, da hier am Beispiel gearbeitet wird, aber b) sehr anschaulich und c) auf ein Viereck übertragbar ist.

III



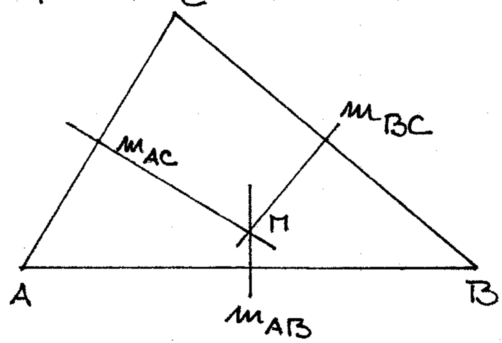
Man läuft ein Mal um das Dreieck herum. In den Ecken dreht man sich um die mit Pfeilen markierten Winkel. Wieder am Start hat man sich um 360° gedreht: $(180° - \beta) + (180° - \gamma) + (180° - \alpha) = 360°$ auflösen ergibt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ b) Anschaulicher Ansatz, aber unanschauliche Umformungen. a) logisch exakt und c) gut auf Vierecke übertragbar.

2. Satz zur Mittelsenkrechten



Liegt P auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$, so ist P von den Punkten A und B gleich weit entfernt. Und umgekehrt.

Formal: $P \in m_{AB} \iff |AP| = |BP|$



Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks ABC schneiden sich in einem Punkt M.

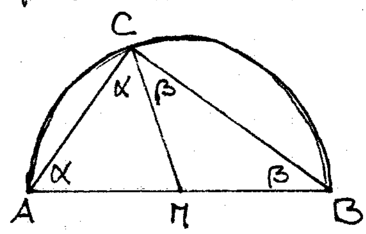
Beweis:

$$M = m_{AB} \cap m_{AC} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} M \in m_{AB} & \Rightarrow |MA| = |MB| \\ \text{und} & \\ M \in m_{AC} & \Rightarrow |MA| = |MC| \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow |MA| \begin{array}{l} = |MB| \\ = |MC| \end{array} \Rightarrow |MB| = |MC| \Rightarrow M \in m_{BC}$$

Also muss m_{BC} auch durch M verlaufen

3. Satz des Thales:



Über einem Durchmesser $\overline{AB}$ ist jeder Winkel zu einem Punkt auf dem Kreis ein rechter. ~~Und umgekehrt~~

formal: $\overline{AB}$ Durchmesser zum Kreis K

$$C \in k \Longrightarrow |\sphericalangle ACB| = 90°$$

Beweis: (formal)

$\overline{AB}$ Durchmesser $\Rightarrow M \in \overline{AB}$ und $|MA| = |MB|$

C auf dem Kreis $\Rightarrow |MC| = |MA| = |MB|$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \triangle AMC \text{ ist gleichschenklig} & \Rightarrow |\sphericalangle MAC| = |\sphericalangle ACM| = \alpha \\ \text{und} & \\ \triangle MBC \text{ ist gleichschenklig} & \Rightarrow |\sphericalangle CBM| = |\sphericalangle MCB| = \beta \end{array} \right.$$

(Basiswinkelsatz)

Dann gilt $|\sphericalangle CMA| = 180° - 2\alpha$, $|\sphericalangle BMC| = 180° - 2\beta$

Summe: $|\sphericalangle CMA| + |\sphericalangle BMC| = 180°$

$$\Rightarrow (180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta) = 180°$$

$$\Rightarrow 180° - 2\alpha - 2\beta = 0$$

$$\Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 180° \quad | :2$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90°$$

Der Winkel $\sphericalangle ACM$ hat immer die Größe $\alpha + \beta = 90°$

HAUSÜBUNGEN

4. Da ABCDEFGHK ein regelmäßiges 9-Eck ist, ist

$|\sphericalangle FMG| = \frac{360°}{9} = \underline{\underline{40°}}$

Da $\triangle FGM$ gleichschenklig ist, ist $|\sphericalangle MGF| = |\sphericalangle GFM|$

$= \frac{1}{2}(180° - 40°) = \underline{\underline{70°}}$ (Basiswinkelsatz)

Also ist $|\sphericalangle KHG| = 2 \cdot |\sphericalangle MGF| = \underline{\underline{140°}}$

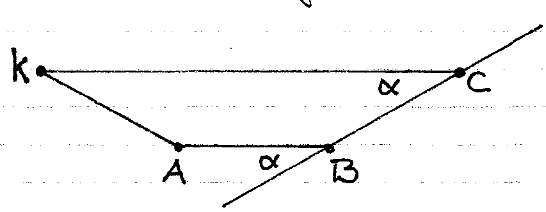
$\triangle AMF$ ist gleichschenklig mit $|\sphericalangle FMA| = 4 \cdot 40° = 160°$

also ist $|\sphericalangle AFM| = \frac{1}{2}(180° - 160°) = \underline{\underline{10°}}$

Da $|\sphericalangle DKE| = 2 \cdot |\sphericalangle AFM|$ ist also $|\sphericalangle DKE| = \underline{\underline{20°}}$

[2. Begründung: Die Punkte A, B, ..., K liegen auf einem Kreis. $\overline{ED}$ ist eine Sehne, $\sphericalangle DME$ ein Mittelpunktswinkel mit $|\sphericalangle DME| = 40°$. $\sphericalangle DKE$ ist ein Peripheriewinkel zu $\overline{ED}$, also halb so groß, also $|\sphericalangle DKE| = \underline{\underline{20°}}$]

$\sphericalangle DCK$: Hier gibt es viele Wege, z.B.

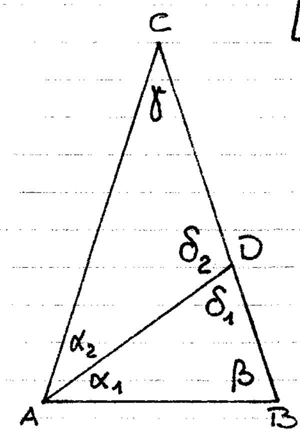


Aus Symmetriegründen ist AB ∥ CK und BC schneidet die Parallelen

$\Rightarrow |\sphericalangle KCB| = |\sphericalangle AB, BC| = \alpha$ da Stufenwinkel

$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle KHG| = 140°$ (s.o.) $\Rightarrow \alpha = 180° - 140° = 40°$

$|\sphericalangle DCK| = |\sphericalangle DCB| - \alpha = 140° - 40° = \underline{\underline{100°}}$



5. gleichschenkl. Δ Basiswinkelsatz

$\Delta ABC \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ ①

$\Delta ADC \Rightarrow \alpha_2 = \gamma$ ②

$\Delta ABD \Rightarrow \beta = \delta_1$ ③

~~Winkl~~ Dreieck Winkelsummensatz

$\Delta ABC \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma = 180°$ ④

$\Delta ADC \Rightarrow \alpha_2 + \delta_2 + \gamma = 180°$ ⑤

$\Delta ABD \Rightarrow \alpha_1 + \beta + \delta_1 = 180°$ ⑥

Damit können wir alle Winkel als Funktion eines Winkels darstellen. Wir wählen β:

③ $\delta_1 = \beta$ ⑥ $\alpha_1 = 180° - 2\beta$ ① $\alpha_2 = \beta - \alpha_1 = 3\beta - 180°$

② $\gamma = \alpha_2 = 3\beta - 180°$ ⑤ $\delta_2 = 180° - 2\gamma = 3 \cdot 180° - 6\beta$

Gleichung ④ wurde noch nicht benutzt, also einsetzen in ④

$$180° - 2\beta + 3\beta - 180° + \beta + 3\beta - 180° = 180°$$

$$5\beta - 180° = 180°$$

$$\beta = \frac{360°}{5} = 72°$$

Dann sind: $\delta_1 = 72°$ $\alpha_1 = 36°$ $\alpha_2 = 36°$ $\gamma = 36°$ $\delta_2 = 108°$

6. Der Körper hat so viele Quadrate wie der Würfel Flächen hat, also 6, und jede Würfel Ecke wird zu einem Dreieck „plattgedrückt". $\Rightarrow$ $\boxed{8 \text{ Dreiecke}}$

Quadratecken: $6 \cdot 4 = 24$ je 2 in einer Körperecke

also $\boxed{12 \text{ Ecken}}$

Jede Körperkante wird von einer Quadratkante und einer Dreieckskante gebildet.

$6 \cdot 4 = 24 = 8 \cdot 3$ also $\boxed{24 \text{ Kanten}}$