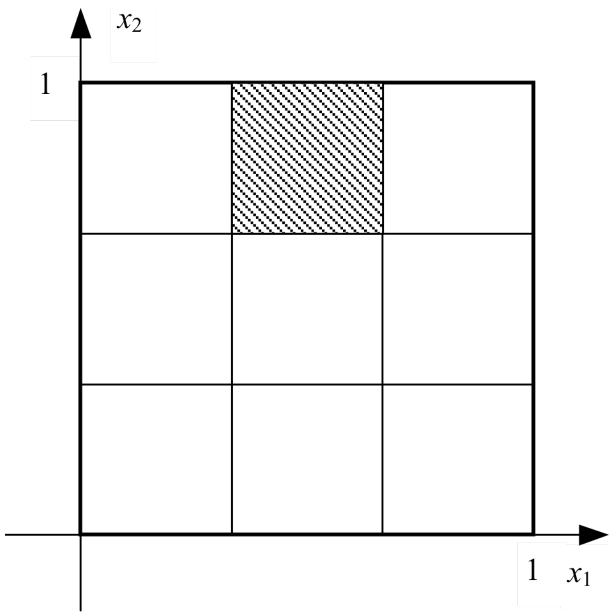
Grundsätzliches: Eine Klausur ist eine Gelegenheit, dem Prüfer zu zeigen, was Sie alles wissen. Es ist also in Ihrem Interesse, dass Ihre Ausführungen lesbar, verständlich und logisch nachvollziehbar sind. Für Studierende des Lehramts ist eine Klausur immer auch eine Prüfung für die Fähigkeit, mathematische Dinge klar und verständlich darzustellen.

1. Kongruenzsätze
   Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD. Die Mittelsenkrechte m der Strecke $\overline{AB}$ schneidet die gegenüberliegende Strecke $\overline{CD}$ im Punkt S. Beweisen Sie:
   Wenn S der Mittelpunkt von $\overline{CD}$ ist, dann ist ABCD ein Rechteck.
   Hinweis: Sie können hier neben den üblichen Basissätzen insbesondere folgende Gesetzmäßigkeiten benutzen:
   - In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang und die diagonal gegenüberliegenden Winkel gleich groß.
   - Die Geraden g und h werden von einer Geraden s geschnitten. Dann gilt: $g \parallel h \Leftrightarrow$ Stufenwinkel sind gleich groß

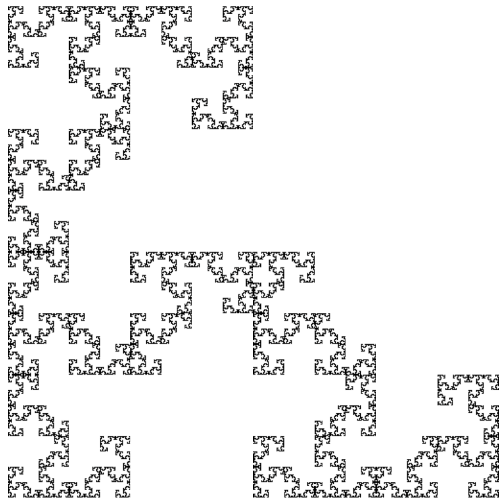
2. Verknüpfen von Kongruenzabbildungen (geometrisch)
   Konstruieren Sie (am linken Rand der Seite, da die weitere Konstruktion sich nach rechts erstreckt) ein Dreieck mit $|AB| = 6\text{ cm}$, $|BC| = 4\text{ cm}$ und $|AC| = 5\text{ cm}$.
   Wir betrachten nun die Spiegelung S an der Mittelsenkrechte m der Strecke $\overline{AB}$ und die Verschiebung T um den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und die Verknüpfung $T \circ S$.
   a. Bilden Sie die drei Punkte A, B und C ab mit $T \circ S$. Die Bildpunkte seien A', B' und C'.
   b. Die Verknüpfung $T \circ S$ ist offensichtlich eine Spiegelung. Welche Gerade ist die Spiegelungsachse?
   c. Allgemein: Unter welchen Bedingungen ergibt die Verknüpfung einer Translation T um den Vektor $\vec{d}$ mit einer Spiegelung S_1 an der Geraden g wieder eine Spiegelung S_2? Wie bestimmt man aus $\vec{d}$ und g die Achse von S_2?
   d. Begründen Sie die Aussage in c. mit dem Zwei-Spiegelungs-Satz.

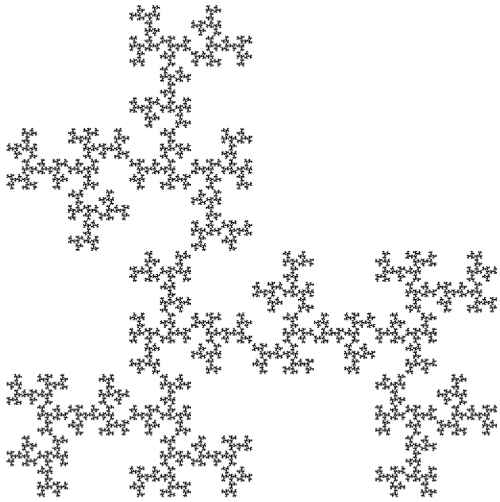
3. Verknüpfen von Kongruenz-/Ähnlichkeitsabbildungen (analytisch). Die (in Bezug auf die von uns betrachtete) nächst kompliziertere Mehrfachverkleinerungskopiermaschine (MVKM) ist die, bei der die Seite des Einheitsquadrats in drei Teile geteilt wird.



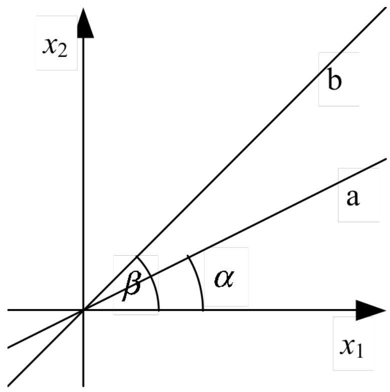
   a. Bei den „Bauplänen“ kommt für jedes Teilquadrat eine der 8 Decktransformationen des Quadrats in Frage, sowie zusätzlich die Möglichkeit, dass das Teilquadrat leer bleibt. Das Teilquadrat oben rechts bleibt in jedem Fall leer. Wie viele mögliche Baupläne gibt es für diese MVKM?
   b. Wie lautet die Abbildungsgleichung, die das Einheitsquadrat auf das schraffierte Teilquadrat abbildet? Dabei wird keine Drehung oder Spiegelung ausgeführt.

c. Geben Sie für die beiden hier dargestellten Fraktale die Baupläne in der üblichen Weise an. (Hier handelt es sich um die „alte" MVKM, in der das Quadrat in vier Teilquadrate geteilt wird.)
Bitte schreiben Sie Ihre Antwort auf Ihre Zettel, **nicht** hier auf das Aufgabenblatt.





4. Matrizenrechnung und Trigonometrie



Gegeben sind die Gerade a, die durch denn Ursprung verläuft und mit der positiven x_1-Achse einen Winkel α einschließt und die Gerade b, die durch denn Ursprung verläuft und mit der positiven x_1-Achse einen Winkel β einschließt (siehe Abbildung).
Wir betrachten dazu die Spiegelungen S_a an a und S_b an b und die Verknüpfung von S_a (als erster) mit S_b, also $S_b \circ S_a$.

a. Beschreiben Sie mit Worten, welche Abbildung die Verknüpfung $S_b \circ S_a$ ergibt. Unterscheiden Sie die Fälle $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ und $\alpha > \beta$.
b. Wie lautet die Abbildungsmatrix zu $S_b \circ S_a$ gemäß Ihrer Überlegung aus a.?
c. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix zu $S_b \circ S_a$, indem Sie die Abbildungsmatrix von S_a mit der von S_b multiplizieren. (Berechnen Sie dazu nur eines der 4 Matrix-Elemente ausführlich und verzichten Sie auf die Berechnung der drei übrigen.)

5. Arithmetik
Betrachten Sie folgende Eigenschaft zur Teilbarkeit:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $5 \mid 2^{5n} - 3^{3n}$

a. Beweisen Sie die Aussage mit vollständiger Induktion.
b. Beweisen Sie die Aussage mit Mitteln der Kongruenzrechnung (Modulorechnung).