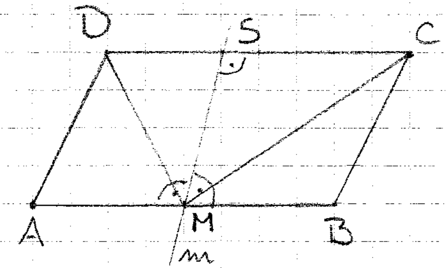
1. 

Stufenwinkel => Winkel bei S sind rechte Winkel ①

ΔMCS ΔMSD

$|\sphericalangle MSC| = |\sphericalangle DSM| = 90°$

$|MS| = |MS|$ trivial

$|SC| = |SD|$ Vorauss. ③

Also: $\Delta MCS \cong \Delta MSD$ nach SWS $\Rightarrow |MC| = |MD|$ ①

ΔAMD ΔMBC

$|AM| = |MB|$ da M Mitte von AB

$|MD| = |MC|$ gerade oben gezeigt

$|AD| = |BC|$ gegenüberl. Seiten im Parallelogr.

Also: $\Delta AMD \cong \Delta MBC$ nach SSS ③

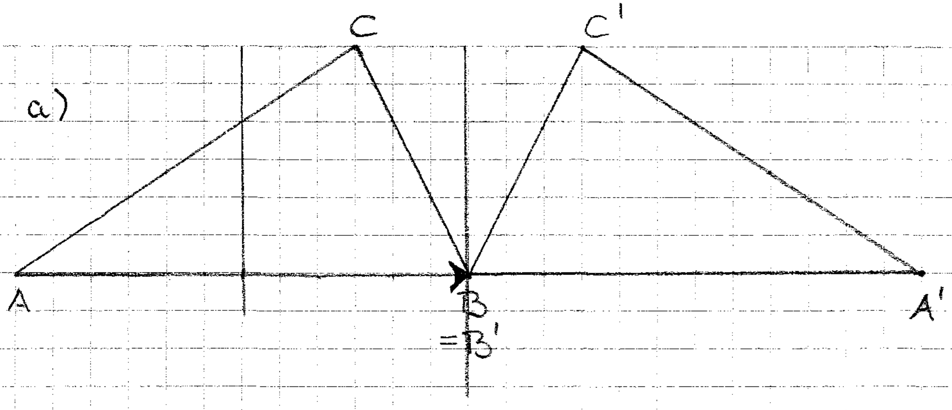
$\Rightarrow |\sphericalangle MAD| = |\sphericalangle CBM|$ ①

Nach dem Stufenwinkelsatz ist $|\sphericalangle CBM| = 180° - |\sphericalangle MAD|$

also ist $|\sphericalangle MAD| = |\sphericalangle CBM| = 90°$. ①

Damit ist ABCD ein Rechteck.

2. a)



3

b) Die Achse für $T \circ S$ ist die zu AB senkrechte Gerade durch B 1

c) Eine Verschiebung kann man in die Verknüpfung von zwei Spiegelungen S_a und S_b verwandeln mit $a \parallel b$ und die Achsen a, b sind senkrecht zum Verschiebungsvektor. →d

Also muss der Verschiebungsvektor senkrecht zur Achse g von S_1 sein. 1

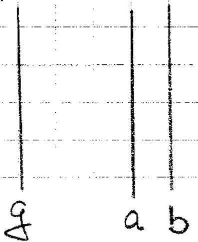
Die Achse von $S_2 = T \circ S_1$ ist eine Gerade, die

- parallel zu g ist
- zu g den Abstand der halben Länge des Verschiebungsvektors $\vec{d}$ hat.
- auf der Seite von g liegt wie die Richtung von $\vec{d}$ angibt

3

d) siehe c)

Die Achsen a, b haben den Abstand $\frac{1}{2}|\vec{d}|$ und dürfen parallel verschoben werden.



Dann ist $\quad T \circ S_1 = S_b \circ S_a \circ S_1 \quad = \quad S_{b'} \circ S_{a'} \circ S_1$

mit $a' = g$

$$= S_{b'}$$

3a) Das Feld rechts oben bleibt leer.

Also hat man noch 8 Felder, in dem man 9 Möglichkeiten hat, 8 Abb. und leer lassen.

Also gibt es $9^8 =$ Möglichkeiten für Baupläne 3

b) K: Stauchung mit $\frac{1}{3}$ an O

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \vec{x}$$

T: Verschiebung an die passende Position

$$\vec{x}'' = \vec{x}' + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Verknüpfung T o K: $\vec{x}'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 3

c) D_{270} D_{90}

S_0 S_{45} S_{90} D_{180}

3

4. a) Nach dem Zwei-Spiegelungs-Satz erhält man eine Drehung um O um den doppelten, eingeschlossenen Winkel

$\alpha < \beta$: Drehung um $2 \cdot (\beta - \alpha)$ gegen d. Uhrz.s.

$\alpha = \beta$: identische Abbildung, da $a = b$

$\alpha > \beta$: Drehung um $2(\alpha - \beta)$ im Uhrz.s.

oder um $2(\beta - \alpha)$ gegen d. Uhrz.s. 4

b) Drehmatrix mit dem Drehwinkel $2 \cdot (\beta - \alpha)$

$$\begin{pmatrix} \cos 2(\beta-\alpha) & -\sin 2(\beta-\alpha) \\ \sin 2(\beta-\alpha) & \cos 2(\beta-\alpha) \end{pmatrix}$$ 2

c) Multiplikation der beiden Spiegelungsmatrizen

$$\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Das Element_{11} ist

$$d_{11} = \cos 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\beta \sin 2\alpha$$

Additionsth. cos

$$= \cos(2\beta - 2\alpha) = \cos 2(\beta - \alpha)$$ 3

5 BA

a) $5 \mid 2^{5n} - 3^{3n}$

Induktionsanf. $n=1$ $\quad 2^5 - 3^3 = 32 - 27 = 5$ ✓

Ind. Voraussetzung $\quad 2^{5n} - 3^{3n} = 5k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Ind. Behauptung $\quad 2^{5(n+1)} - 3^{3(n+1)} = 5k', \quad k' \in \mathbb{Z}$

Ind. Beweis: $\quad 2^{5(n+1)} - 3^{3(n+1)}$

$$= 2^5 \cdot 2^{5n} - 3^3 \cdot 3^{3n}$$

$$= 32 \cdot 2^{5n} - 27 \cdot 3^{3n}$$

$$= 27 \cdot \underbrace{(2^{5n} - 3^{3n})}_{\text{Ind. Vor.}} + 5 \cdot 2^{5n}$$

$$= 27 \cdot 5k + 5 \cdot 2^{5n}$$

$$= 5 \cdot \underbrace{(27k + 2^{5n})}_{k' \in \mathbb{Z}}$$

Also gilt $5 \mid 2^{5n} - 3^{3n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\quad$ 6

b) $2^{5n} = 32^n$ $\quad$ da $32 \equiv 2 \mod 5$ gilt

$32^n \equiv 2^n \mod 5$ $\quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$3^{3n} = 27^n$ $\quad$ da $27 \equiv 2 \mod 5$ gilt

$27^n \equiv 2^n \mod 5$ $\quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Also gilt $32^n \equiv 27^n \mod 5$

$\Leftrightarrow 32^n - 27^n = 5 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2^{5n} - 3^{3n} = 5 \cdot k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\quad$ 4

5 Ex

Mit Q_1 hat man eine Strahlensatzfigur,
Zentrum M_1. 2. Strahlensatz

$$\frac{|Q_1 S|}{r_2} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \Rightarrow |Q_1 S| = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$ 3

Mit Q_2 hat man eine weitere Strahlensatzfigur
mit Zentrum M_2. 2. Strahlensatz

$$\frac{|Q_2 S|}{r_1} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \Rightarrow |Q_2 S| = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$ 3

Also folgt $|Q_1 S| = |Q_2 S|$ 1

Da beide Punkte Q_1 und Q_2 auf g liegen
und von S in dieselbe Richtung abgetragen
wurden, folgt $Q_1 = Q_2 = Q$
Die drei Geraden $H_1 M_2$, $H_2 M_1$ und g schneiden
sich in einem Punkt q.e.d. 3