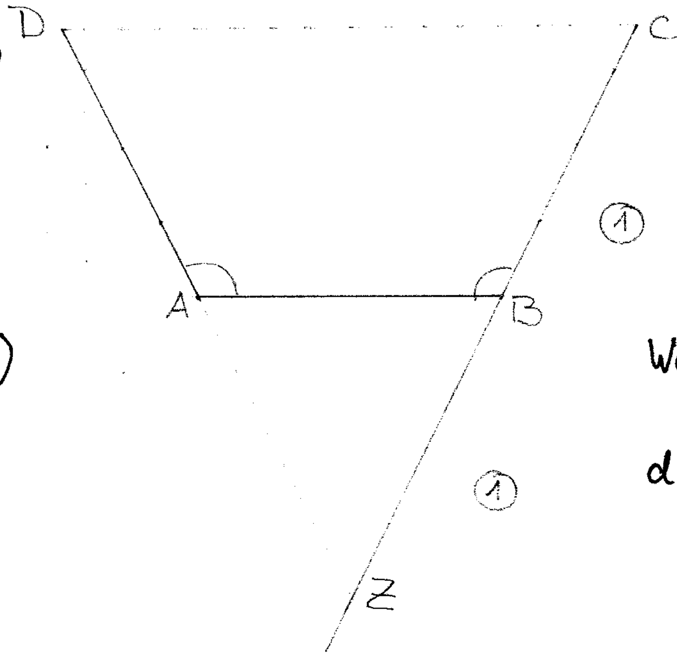
Reimund Albers, Geometrie erleben SoSe 06
Wiederholungsklausur (BA und Ex)

1. a)



Wenn $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CBA|$ *①
dann $DC \parallel AB$ 1

b) Wenn $\frac{|ZA|}{|ZD|} = \frac{|ZB|}{|ZC|}$ *②

dann $DC \parallel AB$ 1

c) Der Beweis besteht darin, aus der Winkelgleichheit *① die Verhältnisgleichung *② zu folgern.

$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CBA| \Rightarrow$ (Nebenwinkel) $|\sphericalangle ZAB| = |\sphericalangle ABZ|$ 1
$\Rightarrow \triangle ZBA$ gleichschenklig mit Basis $\overline{AB}$ 1
$\Rightarrow |ZA| = |ZB|$ *③ 1
Wegen $|AD| = |BC|$ gilt auch $|ZD| = |ZC|$ *④ 1
Division von *③ durch *④ liefert
$\frac{|ZA|}{|ZD|} = \frac{|ZB|}{|ZC|}$ 1 nach b) folgt, dass $DC \parallel AB$ q.e.d. 1

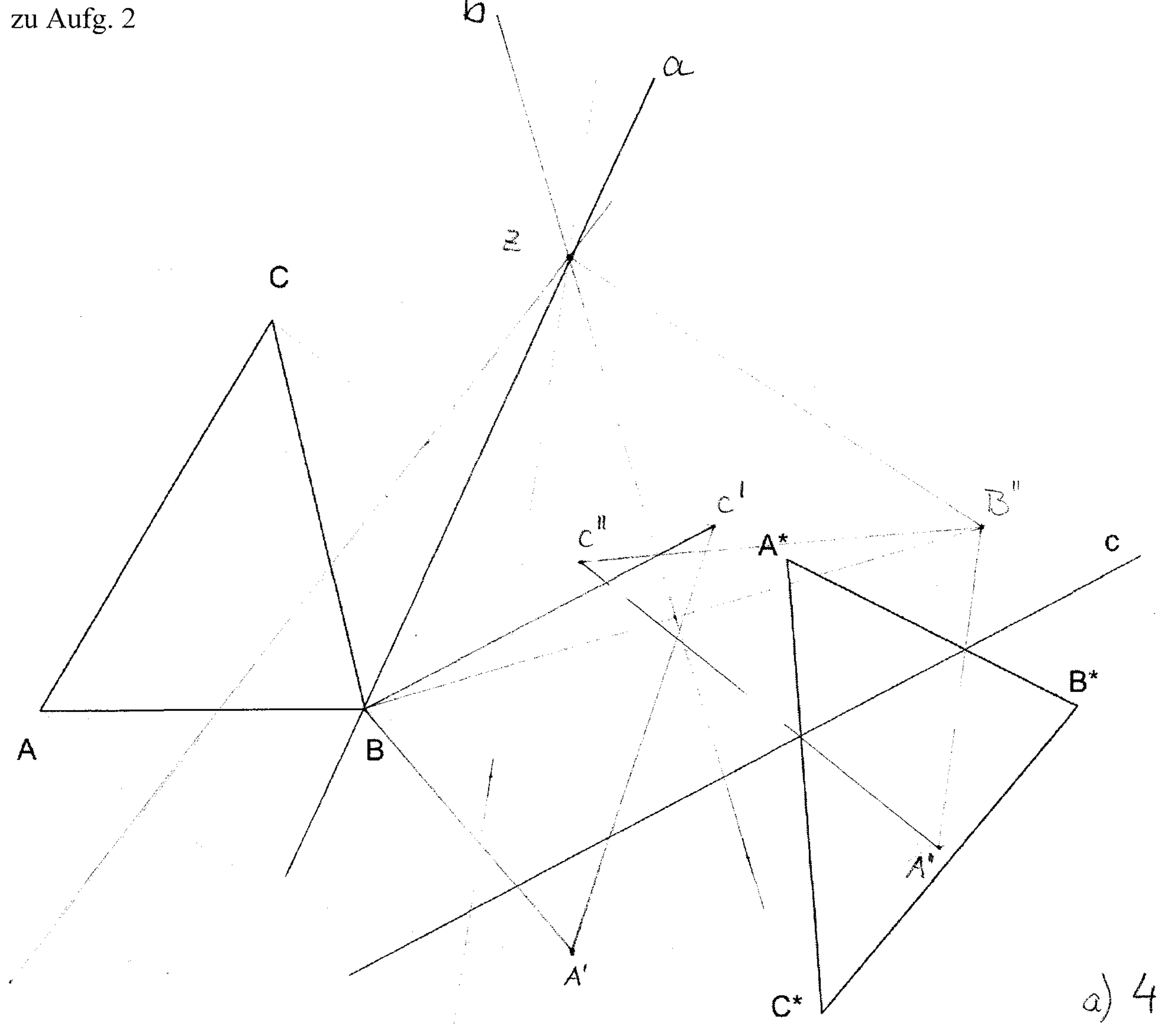
20.13

a) 2
b) 2
c) 6

10

zu Aufg. 2

a)



a) 4

b)

Ich spiegele $\Delta A^* B^* C^*$ an c auf $\Delta A'' B'' C''$. 1

Da ΔABC und $\Delta A'' B'' C''$ kongruent sind und den gleichen Drehsinn haben, gibt es eine Drehung 1 (oder Verschiebung) die $\Delta ABC \rightarrow \Delta A'' B'' C''$

Konstruktion: Mittelsenkrechte zu $\overline{AA''}$ 1 } Schnittp. Z 1

" zu $\overline{BB''}$

Z ist der Drehpunkt

Sei $a = BZ$ 1 konstruiere b als Winkelhalbierende 1 zum Winkel $\measuredangle BZB''$. Dann ist die Spiegelung an a und dann an b gleich der Drehung, die $\Delta ABC \rightarrow \Delta A'' B'' C''$ 1

b) 7

2c) Es gibt unendlich viele Lösungen.
Die Drehung ist durch ΔABC und $\Delta A''B''C''$ eindeutig festgelegt. Die in b) gefundenen Geraden a und b darf man aber um Z bei festgehaltenem Winkel „verdrehen". Das geht auf unendlich viele Weisen.

c) 2

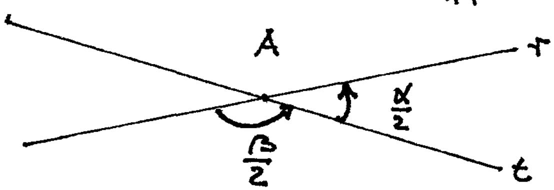
---

3. a) Da sich r und t in einem Punkt A schneiden

ist $S_r \circ S_t = D_{A,\alpha}$ mit $\alpha = 2 \cdot |\measuredangle t, r|$ 1

Die Umkehrung

$S_t \circ S_r = D_{A,\beta}$ mit $\beta = 2 \cdot |\measuredangle r, t|$ 1



Beide Drehungen können nur dann gleich sein, wenn $\alpha = \beta$ 1

Das ist genau dann der Fall wenn $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = 90°$

D.h. $r \perp t$ 1

a) 4

b) $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d \quad | \; S_c \circ$ $\qquad S_c$ von links

$S_b \circ S_a = S_c \circ S_d \quad | \; \circ S_a$ $\qquad S_a$ von rechts

$S_b = S_c \circ S_d \circ S_a$

b) 3

4. a) D_{180} $\qquad$ S_{90}

S_{135} $\quad$ S_0 $\qquad$ $1\frac{1}{2}$ $\qquad$ D_{90} $\quad$ S_{45} $\quad$ $\cancel{D_{270}}$ $\qquad$ $1\frac{1}{2}$

a) 3

b) ausführlich

$$x_1' = \frac{1}{2}x_1 + 0\cdot x_2 + \frac{1}{2}$$

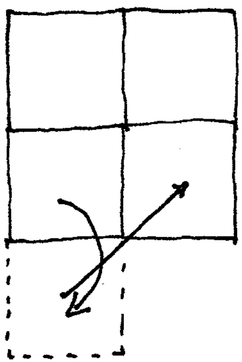
$$x_2' = 0x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}$$

also $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 1 1

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

Spiegelung an waagr. Achse S_0



Es ist die Gleichung für S_0 im Quadrat unten rechts 1 1

b) 5

Erläuterung 1

5. Arithmetik (BA)

a) $12 \cdot 14 = 4 \cdot 3 \cdot 14 = 4 \cdot 42 = 8 \cdot 21$ 1

$18 \cdot 20 = 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 5 = 8 \cdot 45$ 1 Good luck! a) 2

b) Ind Anf $n = 1$

$2n\,(2n+2) = 2 \cdot 4 = 8 = 8 \cdot 1$ ✓ 1

Ind Vorauss. $8 \mid 2n(2n+2)$ 1

d.h. es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $8k = 2n(2n+2)$ 1

Ind. Behaupt. $8 \mid 2(n+1)\big(2(n+1)+2\big)$ 1

Ind. Beweis $2(n+1)\big(2(n+1)+2\big)$

$$= (2n+2)(2n+4)$$

$$= \underbrace{(2n+2)2n}_{\downarrow \text{ Ind.Vor.}} + (2n+2) \cdot 4 \quad 2$$

$$= 8k + 8(n+1) \quad 1$$

$$= 8\underbrace{\big[k + n + 1\big]}_{\in \mathbb{N}}$$

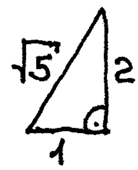
q.e.d.

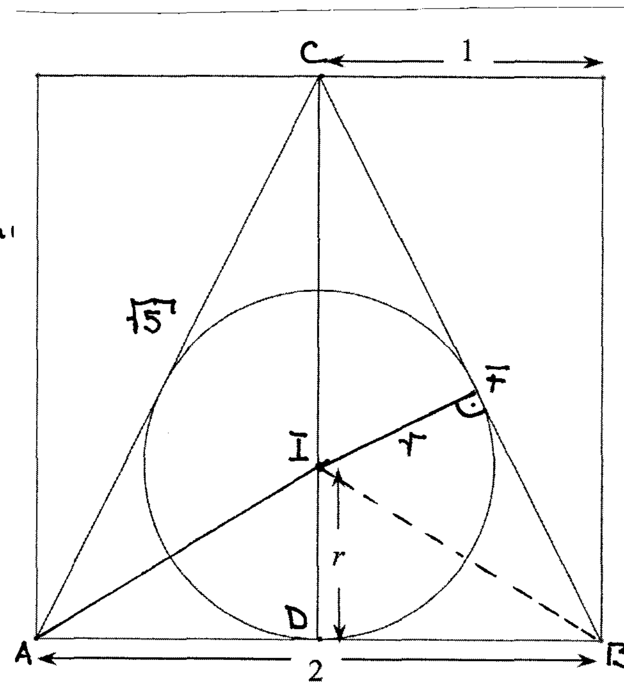
Also gilt $8 \mid 2n(2n+2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ 1 b) 8

$2(n+1)(2n+4) = 4n^2 + 12n + 8$

5. goldener Schnitt (Ex)

Das halbe ~~Rechte~~ Dreieck ist rechtwinklig mit





verschiedene Fortsetzu

i) Die Winkelhalbierende AI teilt die Seite $\overline{CD}$ im Verhältnis der anliegenden Seiten

$$\frac{|DI|}{|IC|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{r}{2-r}$$

$$\Leftrightarrow \; 2-r = r\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \; 2 = r(\sqrt{5}+1) \quad \Leftrightarrow \; r = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$$

Erweitern mit $\sqrt{5}-1$ ergibt $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

oder ii) $\Delta IFC \sim \Delta ADC$ also $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|IC|}{|IF|}$

$\frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{2-r}{r}$ Auflösung wie oben

oder iii) $\Delta DBI \cong \Delta IBF \Rightarrow |FB| = 1 \Rightarrow |FC| = \sqrt{5}-1$

Da $\Delta IFC \sim \Delta ADC$ gilt $\frac{|IF|}{|FC|} = \frac{1}{2}$

also $\frac{r}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$

oder iv) $|FC| = \sqrt{5}-1$ wie in iii)

Pythagoras im ΔIFC: $(2-r)^2 = r^2 + (\sqrt{5}-1)^2$

$$4 - 4r + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 5 - 2\sqrt{5} + 1$$

$$-4r = 2 - 2\sqrt{5} \quad | : (-4)$$

$$r = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$$