Sommersemester 2005
Reimund Albers

Einführung in die Mathematik II

9. Übung
Ähnlichkeit und Strahlensätze, Analytische Geometrie

Präsenzübungen (für 13./14.6.)

1. Ähnlichkeit als Äquivalenzrelation
   Machen Sie sich noch einmal klar, wann eine Relation eine Äquivalenzrelation ist. Schreiben Sie dann auf, welche Bedingung erfüllt ist/sein muss, wenn zwei Polygone ähnlich zueinander sind/sein sollen.
   Weisen Sie damit nach, dass die Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist.

2. a. Schreiben Sie in Koordinatenform: $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$

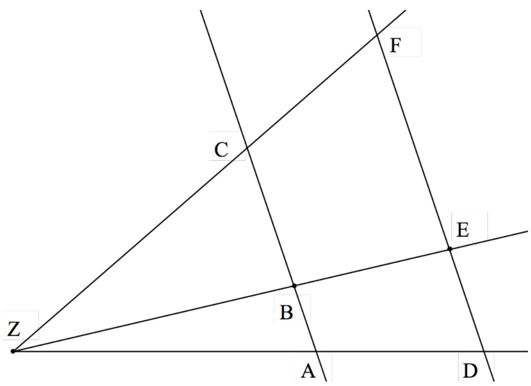
   b. Schreiben Sie (die „Kraut und Rüben“-Gleichungen) in Matrix-Vektor-Form:
   $\overline{x} = cs + tz + h$
   $\overline{y} = sk + qt + p$

3. Erforschen Sie die Abbildung $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

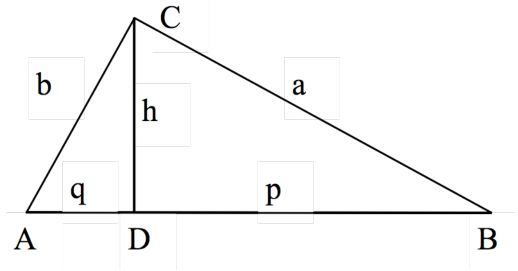
   Anleitung:
   a. Bilden Sie durch Rechnung die Punkte P(2;-1), Q(3;0) und R(1;2) ab auf die Punkte P’, Q’ bzw. R’.
   b. Zeichnen Sie die Dreiecke PQR und P’Q’R’ in ein Achsenkreuz. Vergleichen Sie beide Dreiecke. Sind sie kongruent? Ist der Umlaufsinn gleich oder verändert?
   c. Zeigen Sie rechnerisch exakt, dass $|PR| = |P'R'|$ ist.
   d. Handelt es sich bei der Abbildung um eine Drehung (Drehzentrum?, Drehwinkel?) oder eine Spiegelung (Spiegelungsachse?)

Hausübungen (Abgabe: Mi, 15.6.)

4. 3. Strahlensatz mit Beweis
   Werden drei Strahlen, die von einem Punkt ausgehen, von zwei parallelen Geraden geschnitten, so ist das Verhältnis der Parallelenabschnitte auf der einen Gerade gleich dem entsprechenden Verhältnis auf der anderen Geraden. In den Bezeichnungen der nebenstehenden Zeichnung: $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$
   Beweisen Sie diesen Satz.



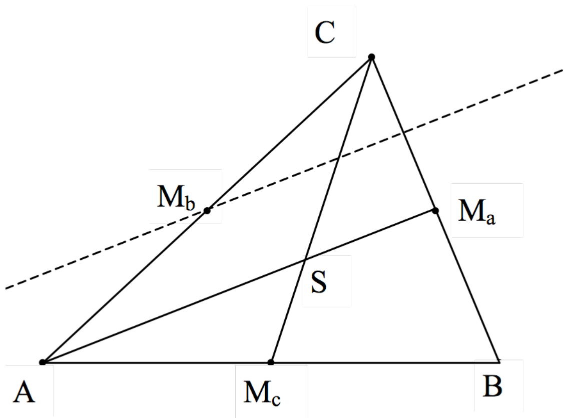
5. Ähnliche Dreiecke
   <u>Satz über ähnliche Dreiecke</u>: Zwei Dreiecke ABC und A'B'C' sind zueinander ähnlich, wenn entsprechende Winkel gleich groß sind.
   a. Begründen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass dieser Satz nicht für Vierecke gilt.
   b. Ein rechtwinkliges Dreieck wird durch die Höhe in zwei Teildreiecke zerlegt, die zum Gesamtdreieck ähnlich sind. Weisen Sie das mit dem oben genannten Satz nach.



   c. Leiten Sie daraus her:
      1. Den Kathetensatz von Euklid: $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$ und daraus den Satz von Pythagoras.
      2. Den Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

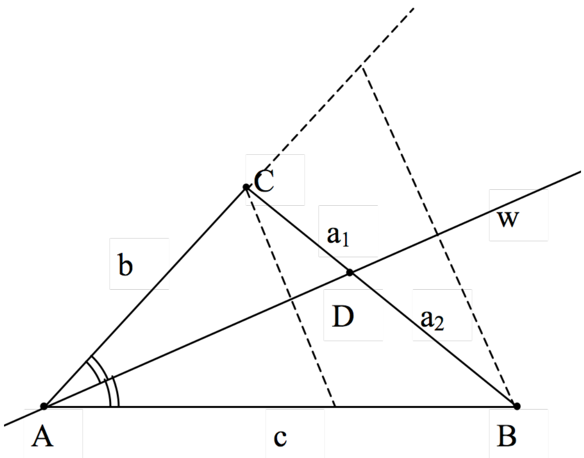
6. Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, den Schwerpunkt S. S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1:2. Beweisen Sie das Teilverhältnis.

   Hinweis: Zeigen Sie die Aussage für die Seitenhalbierende $s_c = \overline{CM_c}$. Dazu ist die Parallele durch M_b zu $s_a = \overline{AM_a}$ eine nützliche Hilfslinie. Sie brauchen noch eine Hilfslinie und können dann mehrmals den 1. Strahlensatz anwenden. Zack – fertig ist der Beweis.



7. In einem Dreieck teilt eine Winkelhalbierende die gegenüber liegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten. D.h. wenn die Winkelhalbierende w zu α die Seite $\overline{BC}$ in D schneidet (siehe Bild) und die Längen der Seitenstücke a_1 bzw. a_2 sind, so gilt : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b}{c}$
   Beweisen Sie diesen Satz.

   Hinweis: Spiegeln Sie B an w auf B' und C an w auf C'. Wenden Sie den 2. Strahlensatz an, dabei ist einmal D das Zentrum.



Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren

8. Verdrehter Würfel. Beschriften Sie die übrigen Ecken.