*Achtung: Beim Verknüpfen von Abbildungen schreibt der Verfasser(**ist mir unbekannt)** die erste Abbildung **links** auf.*

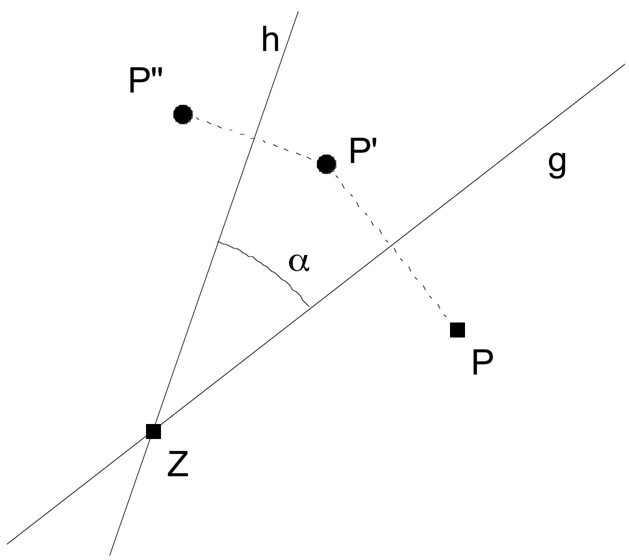
Reimund Albers

3. Hintereinanderausführen von Kongruenzabbildungen

- Warum liefert das Hintereinanderausführen von Kongruenzabbildungen stets wieder eine Kongruenzabbildung?
- Wodurch lässt sich das Hintereinanderausführen von 2 Achsenspiegelungen ersetzen?
- Wodurch lässt sich das Hintereinanderausführen von 2 Verschiebungen ersetzen?
- Wodurch lässt sich das Hintereinanderausführen von 2 Drehungen ersetzen?

a) Hintereinanderausführen von 2 Achsenspiegelungen

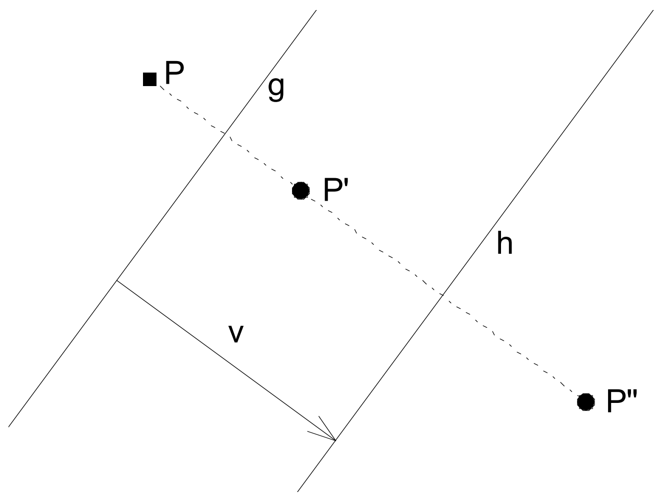
Fall 1: die Spiegelachsen schneiden sich



$ZP = ZP' = ZP''$

$\angle(P,Z,P'') = 2\alpha$

Fall 2: die Spiegelachsen sind parallel



PP'' $\perp$ g

PP'' = 2v

Satz 2.1: Das Hintereinanderausführen von 2 Achsenspiegelungen S_g o S_h lässt sich ersetzen

- durch eine Drehung $D_{Z,\mathbf{2\alpha}}$, falls sich g und h in Z unter α schneiden (dabei ist α der *orientierte Winkel* zwischen g und h)
- durch eine Verschiebung senkrecht zu g; Länge des Verschiebungsvektors: doppelter Geradenabstand; Orientierung von g nach h

Umkehrung von Satz 2.1:

Jede Drehung $D_{Z,\alpha}$ und jede Verschiebung V_v lässt sich durch das Hintereinanderausführen von zwei (geeigneten) Achsenspiegelungen S_g o S_h ersetzen. Dabei müssen die Geraden g und h

- bei der Drehung sich im Drehzentrum Z unter ½ α schneiden: $\angle(g,h) = \frac{1}{2}\alpha$ (Orientierung beachten!)
- bei der Verschiebung V_v parallel zueinander im Abstand ½ v und senkrecht zu v liegen. (Orientierung beachten!)

Man beachte:

Geradenpaare (g,h) und (j,k) mit $\angle(g,h) = \angle(j,k)$, die denselben Schnittpunkt Z haben, liefern dieselbe Drehung!

Geradenpaare (g,h) und (j,k) mit $g \parallel h \parallel j \parallel k$, die denselben Abstand haben, liefern dieselbe Verschiebung!

Gleiche Orientierung ist jeweils Voraussetzung!

b) Hintereinanderausführen von 2 Drehungen

Einfacher Fall: gemeinsames Drehzentrum

$$D_{Z,\alpha} \circ D_{Z,\beta} = D_{Z,\alpha+\beta}$$

interessanter Fall: verschiedene Drehzentren $Z_1 \neq Z_2$

Strategie: Ersetze jede Drehung durch zwei *geeignete* Achsenspiegelungen:

$$D_{Z1,\alpha} = S_{g1} \circ S_{h1}$$

und $$D_{Z2,\beta} = S_{g2} \circ S_{h2}$$

geeignet: Wähle die Achsen so, dass $h_1 = g_2$ ($= Z_1Z_2$!!)

Dann ist

$$\begin{aligned} D_{Z1,\alpha} \circ D_{Z2,\beta} &= S_{g1} \circ S_{h1} \circ S_{g2} \circ S_{h2} \\ &= S_{g1} \circ (S_{h1} \circ S_{g2}) \circ S_{h2} \\ &= S_{g1} \circ S_{h2} \end{aligned}$$

Dies ist

eine Verschiebung, falls $g_1 \parallel h_2$

eine Drehung, falls $g_1 \nparallel h_2$

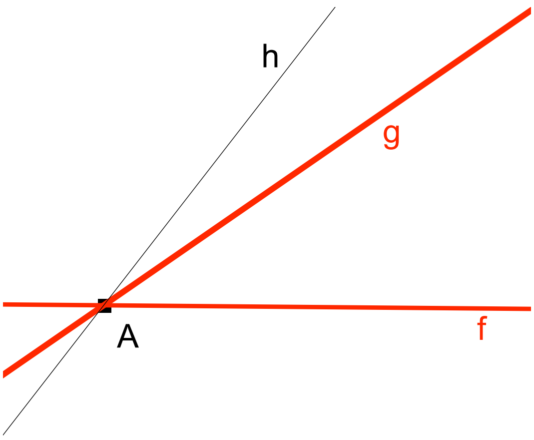
Beispiel:

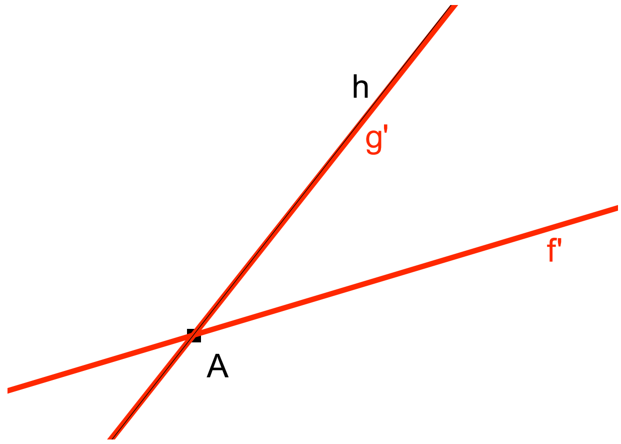
Aus den Werten Z_1, Z_2, α, β sollten Sie entscheiden können, ob $D_{Z1,\alpha} \circ D_{Z2,\beta}$ eine Drehung oder eine Verschiebung ist. Wie groß ist ggf. der Drehwinkel? Wo liegt das Drehzentrum? Ggf. ist der Verschiebungsvektor anzugeben.

a) Hintereinanderausführen von 2 Verschiebungen
liefert wieder eine Verschiebung (Vektoraddition!)

c) **Hintereinanderausführen von 3 Achsenspiegelungen**
(bzw. Hintereinanderausführen einer Achsenspiegelung und einer Drehung
bzw. . Hintereinanderausführen einer Achsenspiegelung und einer Verschiebung)

Fall 1: die 3 Achsen gehen alle durch 1 Punkt





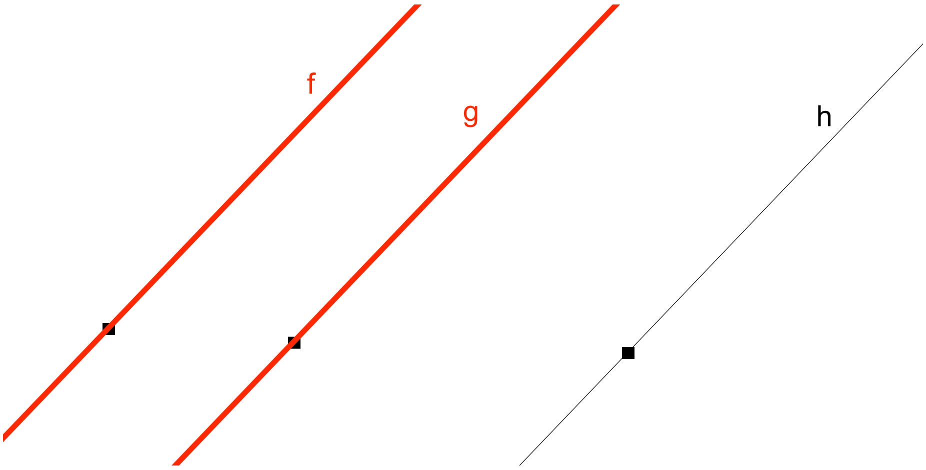
$S_f \circ S_g \circ S_h \quad = \; (S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S_h$

$= \; S_{f'} \circ (S_{g'} \circ S_h)$

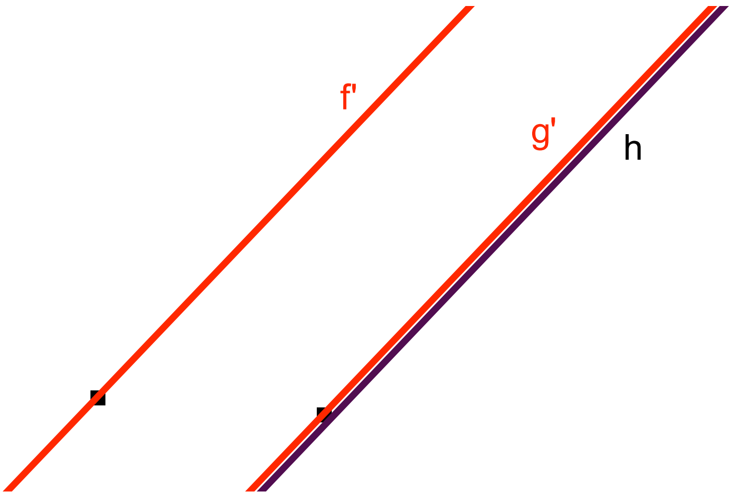
$= \; S_{f'}$

(3 Achsenspiegelungen $\Rightarrow$ 1 Achsenspiegelung)

Fall 2: die drei Spiegelachsen sind parallel



$(S_f o S_g) o S_h$

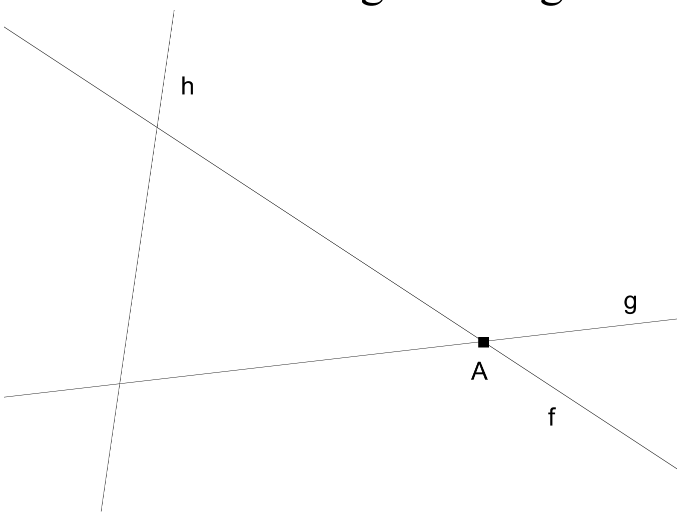


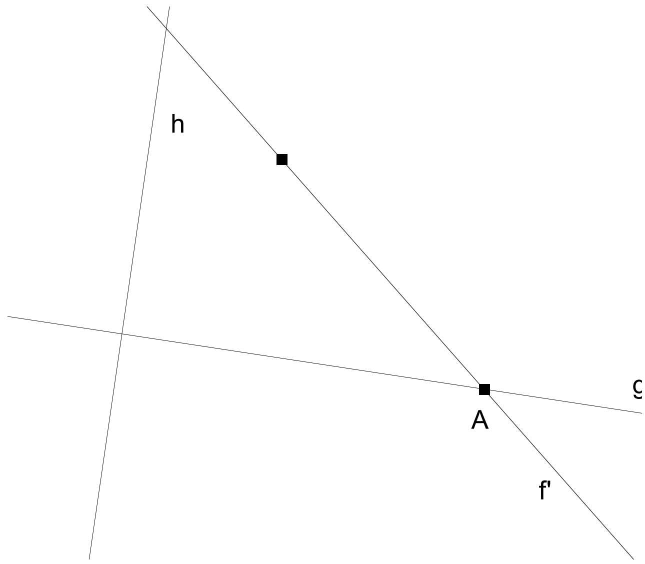
$(S_{f'} o S_{g'}) o S_h$
$= S_{f'} o (S_{g'} o S_h)$
$= S_{f'}$

(3 Achsenspiegelungen $\Rightarrow$ 1 Achsenspiegelung)

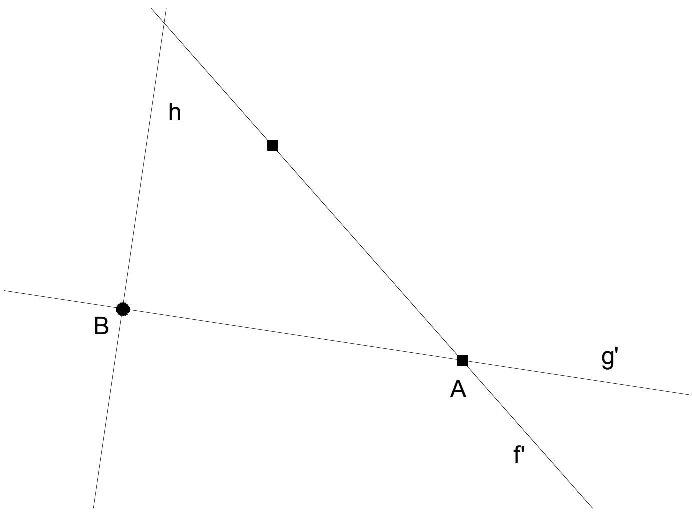
Fall 3: die 3 Achsen gehen nicht alle durch einen gemeinsamen Punkt und sind nicht parallel

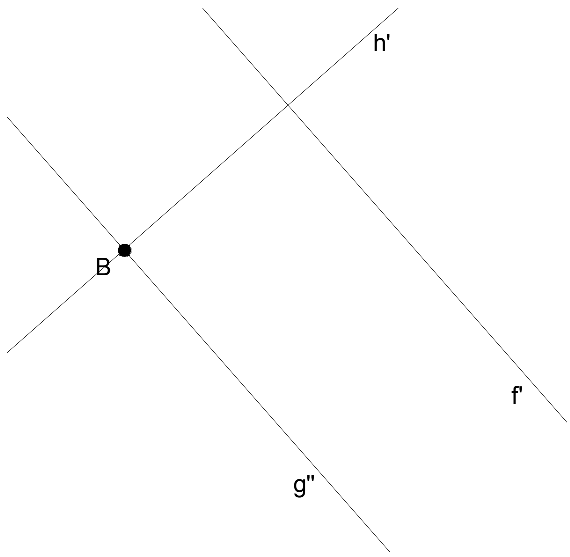
Dieser Fall lässt sich stets darstellen durch das Hintereinanderausführen einer Verschiebung und einer Achsenspiegelung; dabei verläuft die Spiegelachse parallel zur Verschiebungsrichtung





$(S_f \circ S_g) \circ S_h \quad = \quad (S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S_h \qquad (h \perp g')$





$(S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S \quad = \quad S_{f'} \circ (S_{g'} \circ S_h) \quad = \quad S_{f'} \circ (S_{g''} \circ S_{h'}) \qquad (g'' \parallel f')$

$= \quad (S_{f'} \circ S_{g''}) \circ S_{h'}$

Def. Das Hintereinanderausführen einer Verschiebung und einer Achsenspiegelung, wobei die Verschiebung parallel zu der Spiegelachse verläuft, heißt **Schubspiegelung**

Zusammenfassung und Satz 2.2

a) Kongruenzabbildungen der Ebene sind genau die bijektiven, geradentreuen, längentreuen Abbildungen.

b) Durch die Abbildung eines Dreiecks liegt eine Kongruenzabbildung eindeutig fest

c) Zwei kongruente Dreiecke lassen sich durch maximal 3 Achsenspiegelungen aufeinander abbilden

d) Achsenspiegelungen, Drehungen, (Punktspiegelungen), Verschiebungen und Schubspiegelungen sind die einzigen Kongruenzabbildungen

Begr. zu b) Längentreue!

Zu c): seien ABC und A'B'C' kongruente Dreiecke.

Erste Spiegelachse: Mittelsenkrechte von AA';

ABC → A'B*C*

Zweite Spiegelachse: Mittelsenkrechte von B*B'

A'B*C* → A'B'C** *(warum ist A' fix?)*

Dritte Spiegelachse: Mittelsenkrechte von C**C'

A'B'C** → A'B'C' *(warum sind A',B' fix?)*

Evtl. entfallen 1,2,3 Achsenspiegelungen (wann?)