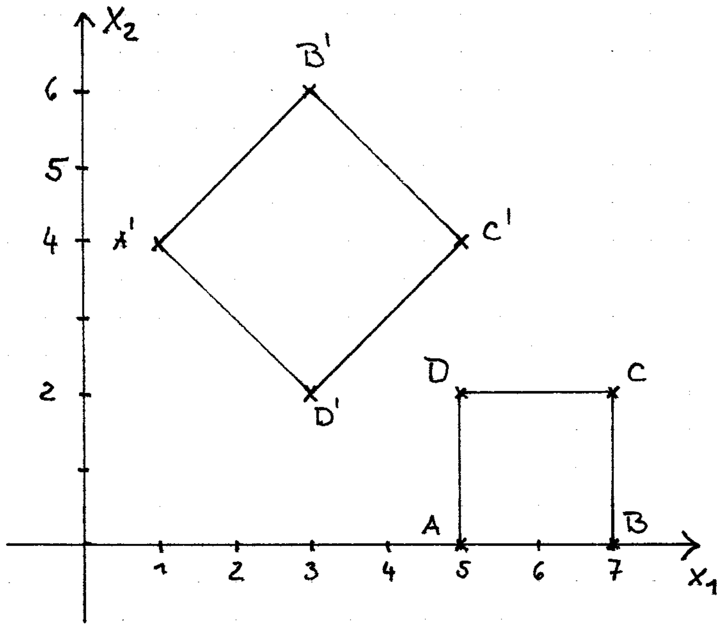
Reimund Albers, Einführung in die Mathematik II, SoSe 05

Übung Nr. 12.

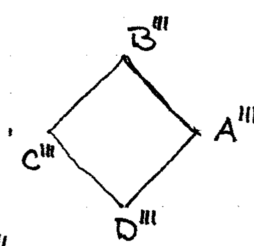
1 a)



b) V_1: Verschiebung von $\square ABCD$ mit Zentrum nach O

$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D_{135}: Drehung um 135° um O.



$$\vec{x}''' = \begin{pmatrix} \cos 135° & -\sin 135° \\ \sin 135° & \cos 135° \end{pmatrix} \vec{x}''$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \vec{x}''$$

T_1: Zentrische Streckung an O mit $k = \sqrt{2}$

$$\vec{x}^{IV} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \vec{x}'''$$

S_{90}: Spiegelung an x_2-Achse

$$\vec{x}^{V} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}^{IV}$$

V_2: Verschiebung des Zentrums von O nach (3; 4)

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\vec{x}^{v} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

c) Verkettung

$$\vec{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}+1&+1\\+1&-1\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}-7\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix}+1&+1\\+1&-1\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$$

d) Umschreiben in Koordinatengleichung (bequemer für Rechnung)

$$x_1' = x_1 + x_2 - 4$$
$$x_2' = x_1 - x_2 - 1$$

$A(5;0) \to a_1' = 5-4 = 1 \quad a_2' = 5-1 = 4 \quad A'(1;4)$ ✓

$B(7;0) \to b_1' = \cancel{3+6-4=5}\ 7-4 = 3 \quad b_2' = \cancel{\ldots}\ 7-1 = 6 \quad B'(3;6)$ ✓

$C(7;2) \to c_1' = 7+2-4 = 5 \quad c_2' = 7-2-1 = 4 \quad C'(5;4)$ ✓

$D(5;2) \to d_1' = 5+2-4 = 3 \quad d_2' = 5-2-1 = 2 \quad D'(3;2)$ ✓

e) Man kann die Abbildungen D_{135}, T_1, S_{90} beliebig in der Reihenfolge vertauschen.

Man kann sofort an x_2-Achse spiegeln und dann erst nach O verschieben. Dann ....

Man schiebt die Ecke A nach O und dreht, spiegelt, streckt dann.

Nach der Verkettung müssen dann aber alle unterschiedlichen Wege dieselbe Abbildungsgleichung liefern.

2. Die Flächen lassen sich leicht nachzählen
18 Quadrate 8 Dreiecke → <u>26 Flächen</u>
In jeder Raumecke stoßen 3 Quadrate
und ein Dreieck zusammen. Also markiert
jede Dreiecksecke eine Raumecke
→ $8 \cdot 3 =$ <u>24 Ecken</u>
In jeder Ecke treffen 4 Kanten zusammen.
Mit $24 \cdot 4 = 96$ zählt man aber jede Kante
doppelt. Also <u>48 Kanten</u>
Damit erfüllt auch dieser Polyeder die Eulersche
Formel Flächen + Ecken = Kanten + 2
(Der letzte Satz wurde frei nach dem Motto geschrieben: „Schau mal
lieber Korrektor was ich für eine fette Ahnung habe.")