Reimund Albers, Einführung i. d. Mathematik, SoSe 05
Übung 11, Lösungsskizzen

Präsenzübungen

1. Ansatz: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2a+2c & 2b+2d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zerlegen in 2 Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 2a + 2c &= 1 \\ a + 2c &= 0 \quad - \\ \hline a \quad &= 1 \\ 2c &= -1 \\ c &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2b + 2d &= 0 \\ b + 2d &= 1 \quad - \\ \hline b \quad &= -1 \\ 2d &= 2 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

Also $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ Probe: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

Fasst man A als Matrix einer Abbildung auf, so ist B die Matrix zur inversen Abbildung. „B macht A rückgängig"

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 2-2 \\ -1+1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B ist sowohl rechts- als auch linksinvers

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 3a + c &= 1 & \quad 3b + d &= 0 \quad (1) \\ 2a + 4c &= 0 & \quad 2b + 4d &= 1 \quad (2) \end{aligned}$$

In beiden Gleichungssystemen führt $4 \cdot (1) - (2)$ zu

$$\begin{aligned} 10a &= 4 & \qquad 10b &= -1 \\ a &= 0{,}4 & \qquad b &= -0{,}1 \\ 4c &= -0{,}8 & \qquad d &= +0{,}3 \\ c &= -0{,}2 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & +0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2-0{,}2 & 0 \\ 0 & -0{,}2+1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

2. Drehmatrix $D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Matrix für $-\alpha$ $\overline{D} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -(\sin(-\alpha)) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Multiplikation beider Matrizen

$$D \cdot \overline{D} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

HAUSÜBUNGEN

3. a) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$

$\left[\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$

gleich!

b) $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} c_{11}b_{11}a_{11} + c_{11}b_{12}a_{21} + c_{12}b_{21}a_{11} + c_{12}b_{22}a_{21} & c_{11}b_{11}a_{12} + c_{11}b_{12}a_{22} + c_{12}b_{21}a_{12} + c_{12}b_{22}a_{22} \\ c_{21}b_{11}a_{11} + c_{21}b_{12}a_{21} + c_{22}b_{21}a_{11} + c_{22}b_{22}a_{21} & c_{21}b_{11}a_{12} + c_{21}b_{12}a_{22} + c_{22}b_{21}a_{12} + c_{22}b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

$\left[\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} & c_{11}b_{12} + c_{12}b_{22} \\ c_{21}b_{11} + c_{22}b_{21} & c_{21}b_{12} + c_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} c_{11}b_{11}a_{11} + c_{12}b_{21}a_{11} + c_{11}b_{12}a_{21} + c_{12}b_{22}a_{21} & c_{11}b_{11}a_{12} + c_{12}b_{21}a_{12} + c_{11}b_{12}a_{22} + c_{12}b_{22}a_{22} \\ c_{21}b_{11}a_{11} + c_{22}b_{21}a_{11} + c_{21}b_{12}a_{21} + c_{22}b_{22}a_{21} & c_{21}b_{11}a_{12} + c_{22}b_{21}a_{12} + c_{21}b_{12}a_{22} + c_{22}b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

Die Komponenten der beiden Ergebnismatrizen sind gleich. Die Reihenfolge der Summanden ist verschieden.

4. a. Allgemeine Spiegelungsmatrix (Ursprungsgerade)

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

S_1 $(\alpha = 0°)$: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$

S_2 $(\alpha = 45°)$: $\vec{x}'' = \begin{pmatrix} \cos 90° & \sin 90° \\ \sin 90° & -\cos 90° \end{pmatrix} \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}'$

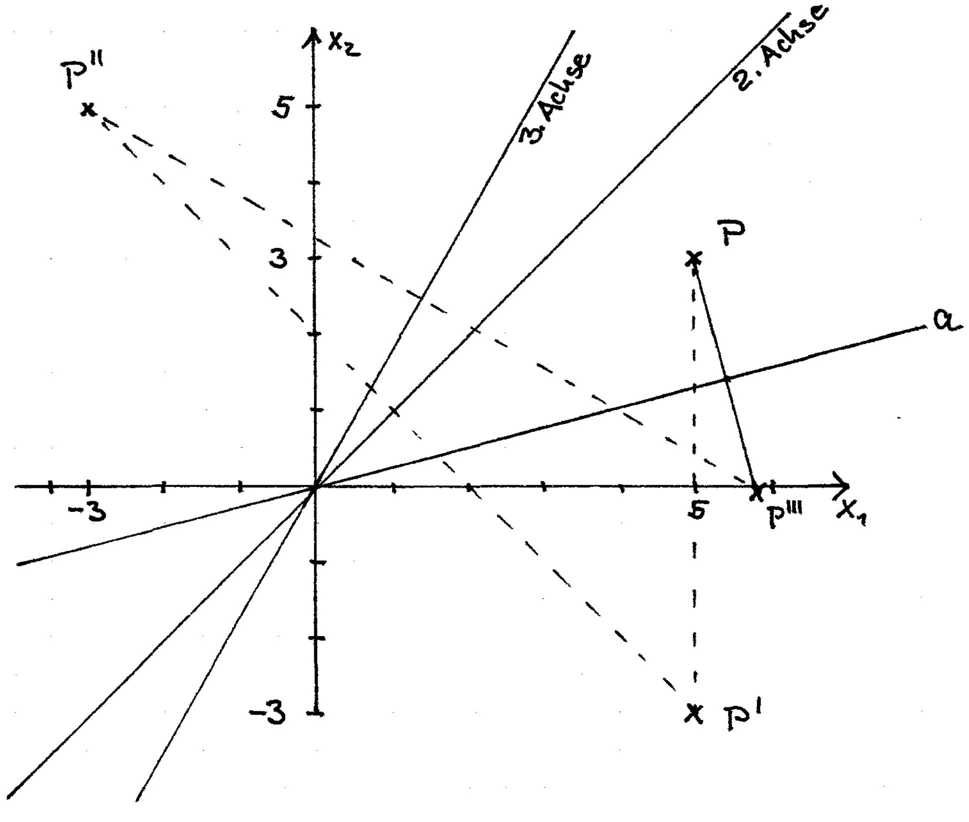
S_3 $(\alpha = 60°)$: $\vec{x}''' = \begin{pmatrix} \cos 120° & \sin 120° \\ \sin 120° & -\cos 120° \end{pmatrix} \vec{x}'' = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}866 \\ 0{,}866 & 0{,}5 \end{pmatrix} \vec{x}''$

b. $\vec{p}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad P'(5; -3)$

$\vec{p}'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad P''(-3; 5)$

$\vec{p}''' = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}866 \\ 0{,}866 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}83 \\ -0{,}098 \end{pmatrix}$ $\quad P'''(5{,}83; -0{,}098)$

c.



$P'(5; -3)$ $\quad P''(-3; 5)$ $\quad P'''(5{,}8; -0{,}1)$

Dieses zeichnerische Ergebnis kann man direkt mit dem rechnerischen in b. verglichen werden. Die Werte stimmen sehr gut überein

d) a ist die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{PP'''}$

e) O liegt auf der 1., 2. und 3. Spiegelachse, also ist O bei den drei Spiegelungen Fixpunkt.
Da Spiegelungen längentreue Abbildungen sind, gilt $|OP| = |OP'| = |OP''| = |OP'''|$. Also muss O nach dem Satz über die Mittelsenkrechte auf der Mittelsenkrechten von $\overline{PP'''}$ liegen.

f) $|\measuredangle\, x_1\text{-Achse}, a| = 14°$

Spiegelungsmatrix: $\begin{pmatrix} \cos 28° & \sin 28° \\ \sin 28 & -\cos 28° \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}883 & 0{,}469 \\ 0{,}469 & -0{,}883 \end{pmatrix}$

(Der Winkel müsste nach dem Drei-Spiegelungs-Satz 15° betragen)

g) Zu $S_3 \circ S_2 \circ S_1 = S_4$ lautet die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos 120° & \sin 120° \\ \sin 120° & -\cos 120° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 120° & \sin 120° \\ \sin 120° & -\cos 120° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} \sin 120° & -\cos 120° \\ -\cos 120° & -\sin 120° \end{pmatrix}$ 1) mit $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ und $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ ergibt sich

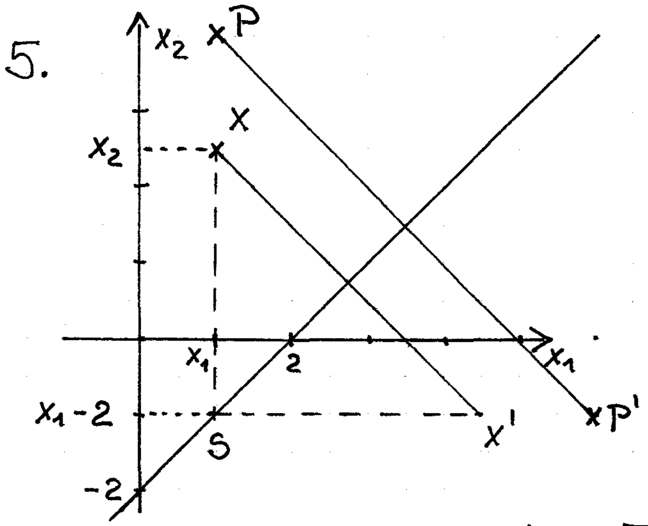
$= \begin{pmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ -\sin(-30°) & -\cos(-30°) \end{pmatrix}$ mit $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ergibt sich

$= \begin{pmatrix} \cos 30° & \sin 30° \\ \sin 30° & -\cos 30° \end{pmatrix}$ Das ist die Matrix für eine Spiegelung an einer Geraden, die mit der x_1-Achse einen Winkel von $\alpha = 15°$ einschließt.

Das lässt sich direkt mit der zeichnerischen Lösung in d) bzw. f) vergleichen und stimmt ganz gut überein

1) Näherungsrechnung: $\begin{pmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}866 \end{pmatrix}$ Diese Matrix stimmt ganz gut mit der in f) berechneten überein.

5.



$X(x_1; x_2)$

S liegt senkrecht unter/über X, hat also die gleiche x_1-Koord.

S liegt auf der Geraden mit der Gleichung $x_2 = x_1 - 2$

also $S(x_1; x_1-2)$

Die Strecke $\overline{XS}$ hat dann die Länge $x_2 - (x_1 - 2)$

Die Koordinaten des Bildpunktes X' sind dann:

$$x_1' = x_1 + |SX'| = x_1 + |SX| = x_1 + x_2 - (x_1 - 2) = x_2 + 2$$

$$x_2' = x_1 - 2$$

Also lauten die Abbildungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 + 2 &&= 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 2 \\ x_2' &= x_1 - 2 &&= 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - 2 \end{aligned}\right\} \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Probe mit $P(1;4)$

Rechnung: $\vec{p}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ also $P'(6;-1)$

Zeichnung: siehe oben $P'(6;-1) \leftarrow$ stimmt

6. Lösungsweg ohne zu basteln:

Man kann das Ikosaeder folgendermaßen gliedern

Deckel und Boden umfassen je 5 Dreiecke, dazwischen liegt ein „Band" aus 10 Dreiecken. Zählt man auf dem Band 5 Dreiecke weiter, so kommt man zum gegenüber liegenden Dreieck. Solch ein „Band" bilden die Dreiecke 1, 5, 4, 10, ...

... 20 (siehe Netz)

Hier kann man sofort zuordnen:

1	5	4	10	9
13	14	16	18	20

Weitere „Bänder"

2	3	8
15	17	19

6	7
11	12

also übersichtlich

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	15	17	16	14	11	12	19	20	18	6	7

13	14	15	16	17	18	19	20
1	5	2	4	3	10	8	9