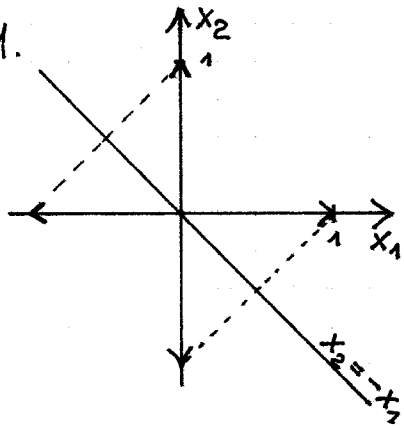
Reimund Albers, Einführung i. d. Mathematik II, SoSe 05

Übung 10, Lösungsskizzen

1.



A Man kann den Satz über das Aufstellen der Abbildungsmatrix anwenden, da der Ursprung auf sich selbst abgebildet wird.

$\vec{e}_1 \to \vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 \to \vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Also: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$

A'

$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Das stimmt mit der Zeichnung überein.

2. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ mit $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgt $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Eingesetzt ergibt sich

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

$\tan 27^\circ = 0{,}5095 \qquad \sin 27^\circ = 0{,}4540 \qquad \sqrt{1-0{,}4540^2} = 0{,}8910$

$\dfrac{0{,}4540}{0{,}8910} = 0{,}5095$ stimmt

HAUSÜBUNGEN

3. Wegen $O(0;0) \to O'(3;1)$ gilt $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A \to A'$ einsetzen: $\begin{cases} 3 = a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 2 + 3 & (1) \\ 0 = a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 2 + 1 & (2) \end{cases}$

$B \to B'$ einsetzen: $\begin{cases} -2 = a_{11}\cdot(-1) + a_{12}\cdot 3 + 3 & (3) \\ -8 = a_{21}\cdot(-1) + a_{22}\cdot 3 + 1 & (4) \end{cases}$

(1): $a_{11} + 2a_{12} = 0$ (2): $a_{21} + 2a_{22} = -1$

(3): $-a_{11} + 3a_{12} = -5$ (4): $-a_{21} + 3a_{22} = -9$

(1)+(3) $5a_{12} = -5$ (2)+(4): $5a_{22} = -10$

$a_{12} = -1$ $a_{22} = -2$

in (1) $\Rightarrow$ $a_{11} = +2$ in (2) $\Rightarrow$ $a_{21} = 3$

also lautet die Abbildungsgleichung

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Probe: $O(0;0) \to O'(3;1)$ klar

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 2 + 3 \\ 3\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\vec{b}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 - 1\cdot 3 + 3 \\ -3\cdot 1 - 2\cdot 3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} \checkmark$$

4 a) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

$\beta = 90^\circ - \alpha$ ergibt

$\sin(\alpha + 90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \cos(90^\circ - \alpha) + \cos\alpha \sin(90^\circ - \alpha)$

$\sin 90^\circ = \sin\alpha \sin\alpha + \cos\alpha \cos\alpha$

also ergibt sich $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha$

$= 2 \sin\alpha \cos\alpha \cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \sin\alpha$

$= 2 \sin\alpha \cos^2\alpha + \sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha$

$= 3 \sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha$

$\sin(3\cdot 13^\circ) = \sin 39^\circ = 0{,}6293$

$\sin 13^\circ = 0{,}2250 \qquad \cos 13^\circ = 0{,}9744$

$3\cdot 0{,}2250 \cdot 0{,}9744^2 - 0{,}2250^3 = 0{,}6409 - 0{,}0114$

$= 0{,}6295$ (leichte Rundungsfehler)

c) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$

kürzen mit $\cos\alpha \cos\beta$ ergibt

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha \cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha \cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha} \sin\beta}{\cancel{\cos\alpha} \cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

5. a) Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha = 30°$

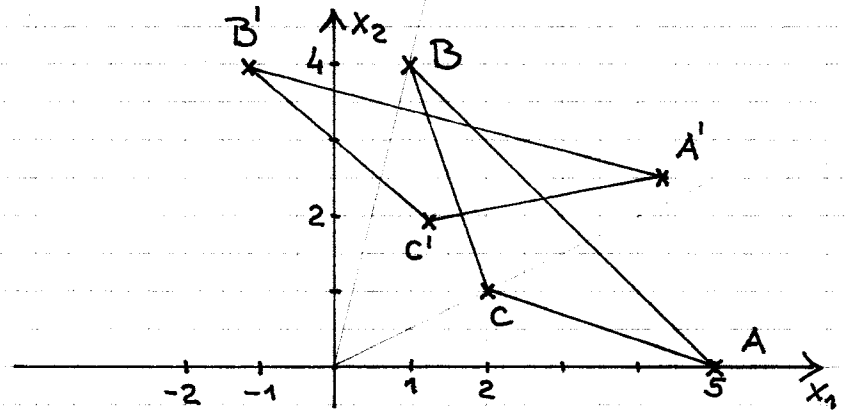
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{pmatrix} \vec{x}$$

b) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}33 \\ 2{,}50 \end{pmatrix}$ $A'(4{,}33\,;\,2{,}50)$

$\vec{b}' = \begin{pmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}13 \\ 3{,}96 \end{pmatrix}$ $B'(-1{,}13\,;\,3{,}96)$

$\vec{c}' = \begin{pmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}23 \\ 1{,}87 \end{pmatrix}$ $C'(1{,}23\,;\,1{,}87)$

c)



abgelesen $A'(4{,}3\,;\,2{,}5)$ $B'(-1{,}2\,;\,3{,}9)$ $C'(1{,}2\,;\,1{,}9)$

d) Wenn ich so die Rechnung in b) mit der Zeichnung in c) vergleiche, bin ich mit dem Ergebnis sehr zufrieden. Zeichnung und Rechnung stimmen gut überein.

Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen

6.

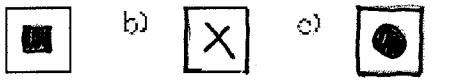
Würfel-Geheimnisse

Viermal derselbe Würfel.
Welches Symbol steht auf der Unterseite?

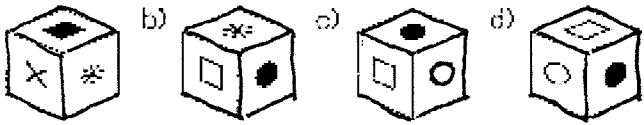
1 a) b) c) d)

Unterseite:

a) b) c) d)



2 a) b) c) d)



Unterseite:

a) b) c) d)

Das ist das Netz des Würfels. Trage die fehlenden Symbole an der richtigen Stelle ein.