Reimund Albers, Einführung in die Mathematik II, SoSe 05

Übung 9, Lösungsskizzen

1. Eine Relation $\square$ heißt Äquivalenzrelation, wenn gilt

a) Reflexivität: Für alle a gilt: $a \square a$

b) Symmetrie: Für alle a, b gilt: $a \square b \Rightarrow b \square a$

c) Transitivität: Für alle a, b, c gilt: $a \square b$ und $b \square c \Rightarrow a \square c$

Zwei Polygone P, Q heißen ähnlich, wenn für entsprechende Strecken gilt: $\dfrac{|P_i P_j|}{|P_k P_l|} = \dfrac{|Q_i Q_j|}{|Q_k Q_l|}$ (1)

Um zu zeigen, dass die Ähnlichkeit zweier Polygone eine Äquivalenzrelation ist, müssen die Eigenschaften a), b) c) überprüft werden.

zu a) Jedes Polygon ist zu sich selbst ähnlich, denn (1) ist erfüllt für $P_i = Q_i$ ...

zu b) Ist $P \sim Q$, gilt also (1), so ist auch $Q \sim P$, was in (1) nur bedeutet, dass die Seiten vertauscht werden.

zu c) Ist $P \sim Q$ und $Q \sim R$, so gilt für alle Punkte aus P, Q, R:

$$\frac{|P_i P_j|}{|P_k P_l|} = \frac{|Q_i Q_j|}{|Q_k Q_l|} \text{ und } \frac{|Q_i Q_j|}{|Q_k Q_l|} = \frac{|R_i R_j|}{|R_k R_l|} \Rightarrow$$

$$\frac{|P_i P_j|}{|P_k P_l|} = \frac{|R_i R_j|}{|R_k R_l|}$$ also sind auch $P \sim R$

2. a) $w_1 = a \cdot u + b \cdot v + t_1$

$w_2 = c \cdot u + d \cdot v + t_2$

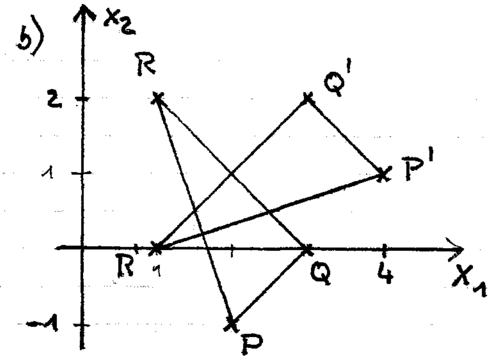
b) $$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & z \\ k & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ p \end{pmatrix}$$

3. In Koordinaten: $x_1' = 3 - x_2 \quad x_2' = x_1 - 1$

a) $P(2;-1) \rightarrow P'(4;1) \quad Q(3;0) \rightarrow Q'(3;2)$

$R(1;2) \rightarrow R'(1;0)$

b)



Es sieht so aus, als ob $\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R'$

~~Es sieht~~ Der Drehsinn bleibt erhalten

→ Es kann eine Drehung sein.

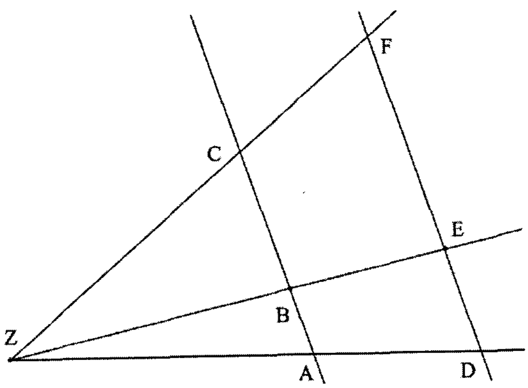
c) $|PR| = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$

$|P'R'| = \sqrt{(4-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$

d) Die Abbildung ist eine Drehung um $Z(2;1)$ um $\alpha = 90°$

<u>Hausübungen</u>

4.



2. Strahlensatz:

$$\frac{|ZB|}{|ZE|} = \frac{|AB|}{|DE|} \quad \text{und}$$

$$\frac{|ZB|}{|ZE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

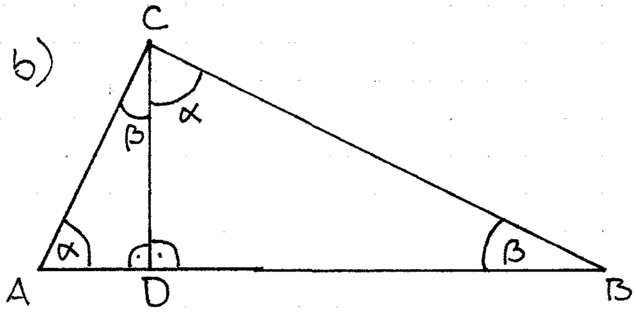
also

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} \quad \Big| \cdot |DE| : |BC|$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|} \quad \text{q.e.d.}$$

5. a) Betrachtet man zwei Rechtecke mit z.B. $a = 2\,cm$ $b = 3\,cm$ und $a' = 2\,cm$ und $b' = 5\,cm$. Es sind zwar alle Winkel gleich groß, aber $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$. Die Rechtecke sind <u>nicht</u> ähnlich.

b)



Im ΔABC gilt

$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

Also gilt im ΔADC, dass $|\sphericalangle ACD| = \beta$ und im ΔDBC, dass $|\sphericalangle DCB| = \alpha$. Damit haben in den Dreiecken ΔABC, ΔADC und ΔDBC die drei Winkel die größen α, β und 90° $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADC \sim \Delta DBC$

c) 1. $\Delta ADC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{q}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow q \cdot c = b^2$ ①

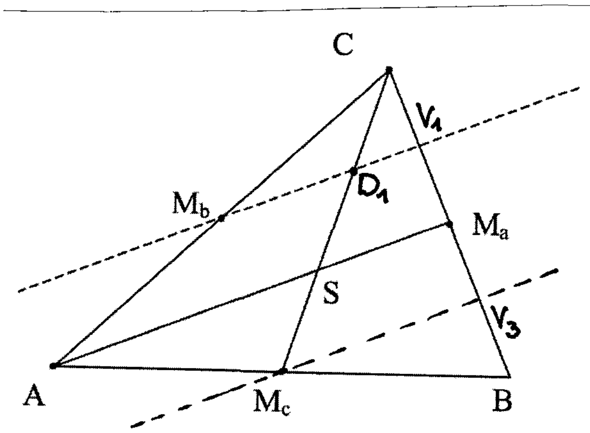
$\Delta DBC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{p}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow p \cdot c = a^2$ ②

addiert man ① und ②: $q \cdot c + p \cdot c = b^2 + a^2$

$\Rightarrow \underbrace{(q+p)}_{=c} c = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$ q.e.d.

2. $\Delta ADC \sim \Delta DBC \Rightarrow \frac{h}{q} = \frac{p}{h} \Rightarrow h^2 = p \cdot q$ q.e.d.

6.



Ich zeichne noch die Parallele zu AM_a durch M_c. Sie schneidet BC in V_3.

1. Strahlensatz, Zentrum C:

$$\frac{|CM_b|}{|CA|} = \frac{1}{2} = \frac{|CV_1|}{|CM_a|}$$

Da $|CM_a| = \frac{1}{2} \cdot |CB|$, gilt $|CV_1| = \frac{1}{4} |CB|$.

1. Strahlensatz, Zentrum B: $\frac{|BM_c|}{|BA|} = \frac{1}{2} = \frac{|BV_3|}{|BM_a|}$.

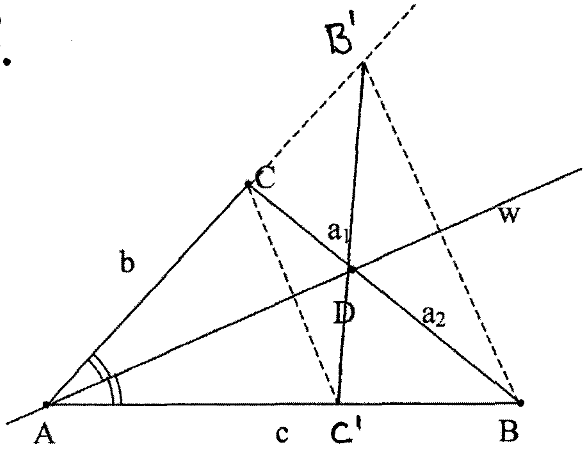
Da $|BM_a| = \frac{1}{2} |BC|$ gilt $|BV_3| = \frac{1}{4} |BC|$.

$\Rightarrow |CV_1| = \frac{1}{4} |BC|$, $|CM_a| = \frac{1}{2} |BC|$, $|CV_3| = \frac{3}{4} |BC|$

1. Strahlensatz, Zentrum C

$$\frac{|CD_1|}{|CM_c|} = \frac{|CV_1|}{|CV_3|} = \frac{\frac{1}{4}|BC|}{\frac{3}{4}|BC|} = \frac{1}{3} \qquad \frac{|CS|}{|CM_c|} = \frac{|CM_a|}{|CV_3|} = \frac{\frac{1}{2}|BC|}{\frac{3}{4}|BC|} = \frac{2}{3}$$

7.



2. Strahlensatz, Zentrum A

$$\frac{|AC|}{|AB'|} = \frac{|CC'|}{|BB'|} = \frac{b}{c}$$

2. Strahlensatz, Zentrum D

$$\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|CC'|}{|BB'|} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b}{c}$$

q.e.d.

8.

8. Verdrehter Würfel. Beschriften Sie die übrigen Ecken.