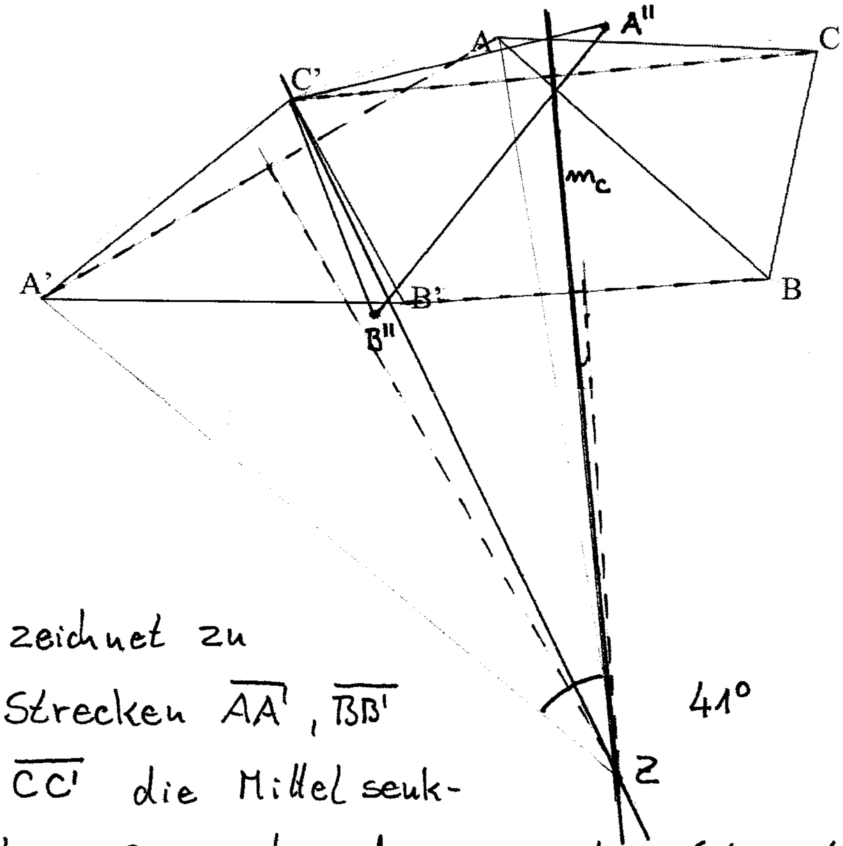
Reimund Albers, Einführung in die Mathematik II, SoSe 05

Übung 7, Lösungsskizzen

1.



a) Man zeichnet zu den Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ die Mittelsenkrechten. Sie schneiden einander (theoretisch) in einem Punkt Z. Dieses ist das Zentrum der Drehung. Der Winkel $\measuredangle AZA'$ gibt dann z.B. den Drehwinkel an. Er ist 41° groß.

b) Die erste Spiegelachse kann eine beliebige Gerade durch Z sein. Hier: Die Mittelsenkrechte m_c von $\overline{CC'}$. ΔABC wird an m_c gespiegelt, Bild ist $\Delta A''B''C''$ $(C'' = C')$

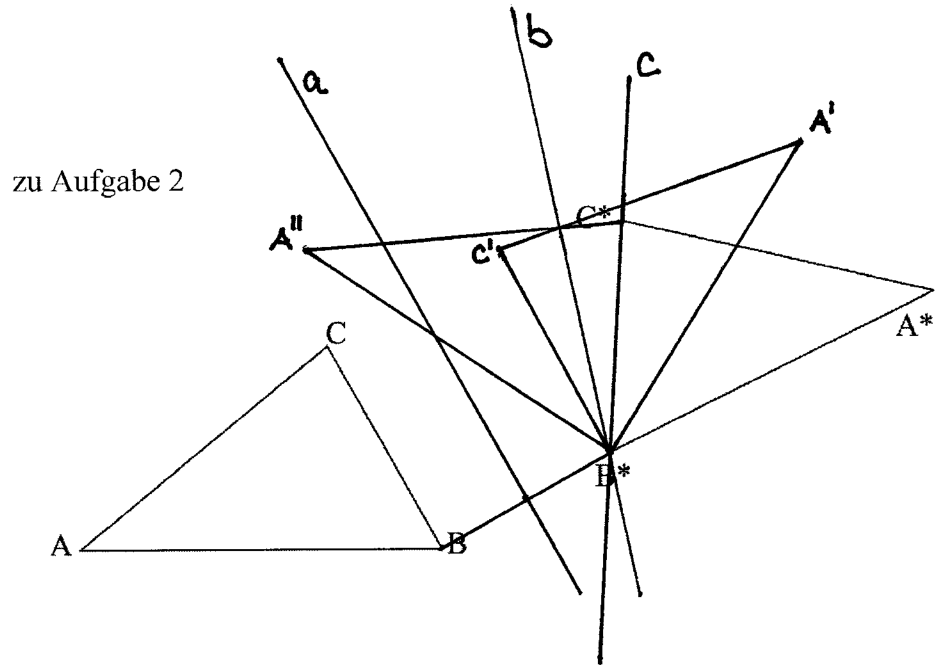
Die zweite Spiegelachse ist dann die Gerade $C'Z$.

Zwischen beiden Spiegelachsen muss ein Winkel der Größe 20,5° sein.

Da die erste Gerade durch Z frei wählbar ist, gibt es unendlich viele Lösungen für die beiden gesuchten Spiegelachsen.

Hausübungen

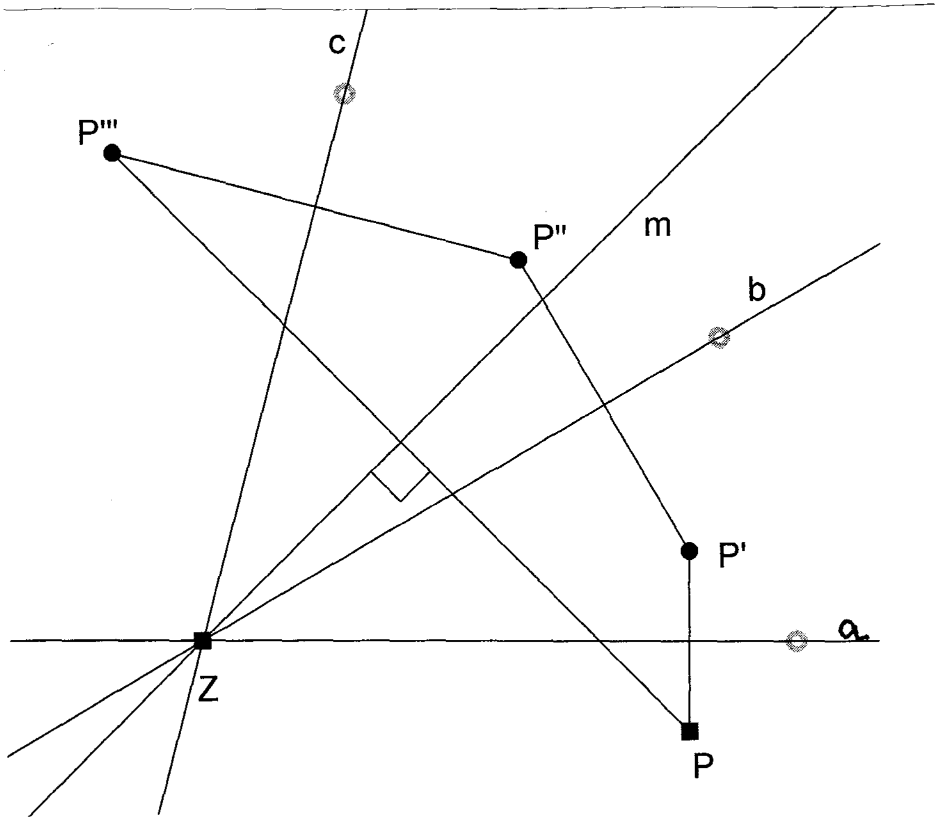
2.



1. Spiegelung an a Mittelsenkrechte von B und B^*
   $A \to A'$, $B \to B^*$, $C \to C'$
2. Spiegelung an b Mittelsenkrechte von C' und C^*
   wegen $|C'B^*| = |C^*B^*|$ liegt B^* auf b
   $A' \to A''$, $B^* \to B^*$, $C' \to C^*$
3. Spiegelung an c Gerade B^*C^*
   $A'' \to A^*$ da $\Delta A''B^*C^* \cong \Delta A^*B^*C^*$
   $B^* \to B^*$, $C^* \to C^*$

Es gibt insgesamt unendlich viele Lösungen. Die erste Spiegelung kann man vollkommen frei wählen. Die restlichen beiden Spiegelungen müssen dann als Verknüpfung genau eine Drehung ergeben. Dafür kann man aber auch die Achsen auf unendlich viele Arten wählen (siehe Aufg 1).

3a)

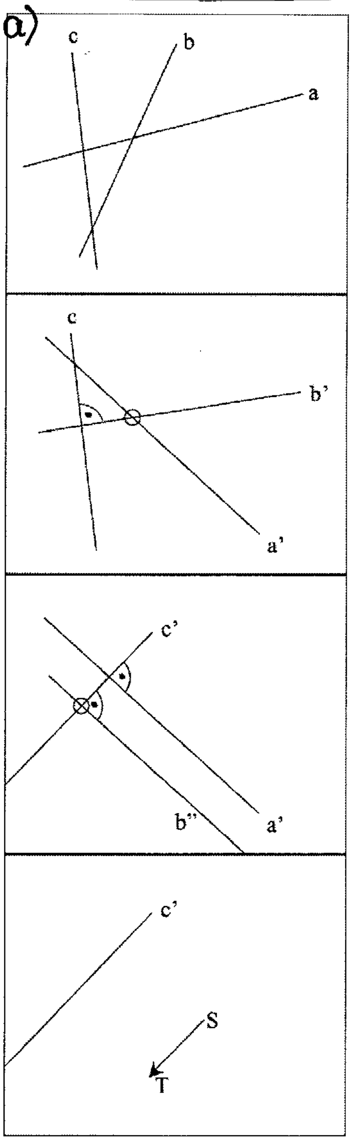


Ausdruck direkt aus DynaGeo. Gestrichelte Linien werden nicht so dargestellt.

b) Die Mittelsenkrechte m bleibt fest, egal wohin man P bewegt. Insbesondere geht m durch Z.
Begründung: $|PZ| = |P'Z| = |P''Z| = |P'''Z|$, da Spiegelungen längentreu sind. Aus $|PZ| = |P'''Z|$ folgt nach dem Satz über die Mittelsenkrechte, dass Z auf m liegt.

c) Bei allen Veränderungen gilt $|\measuredangle a,b| = |\measuredangle m,c|$

4. a)



Die drei Spiegelungen an den Achsen a, b, c werden verknüpft: $S_c \circ S_b \circ S_a$

Die Achsen a und b werden um ihren Schnittpunkt bei festem Winkel verdreht, so dass $b' \perp c$. Nach dem Satz über zwei Spiegelungen gilt $S_b \circ S_a = S_{b'} \circ S_{a'}$

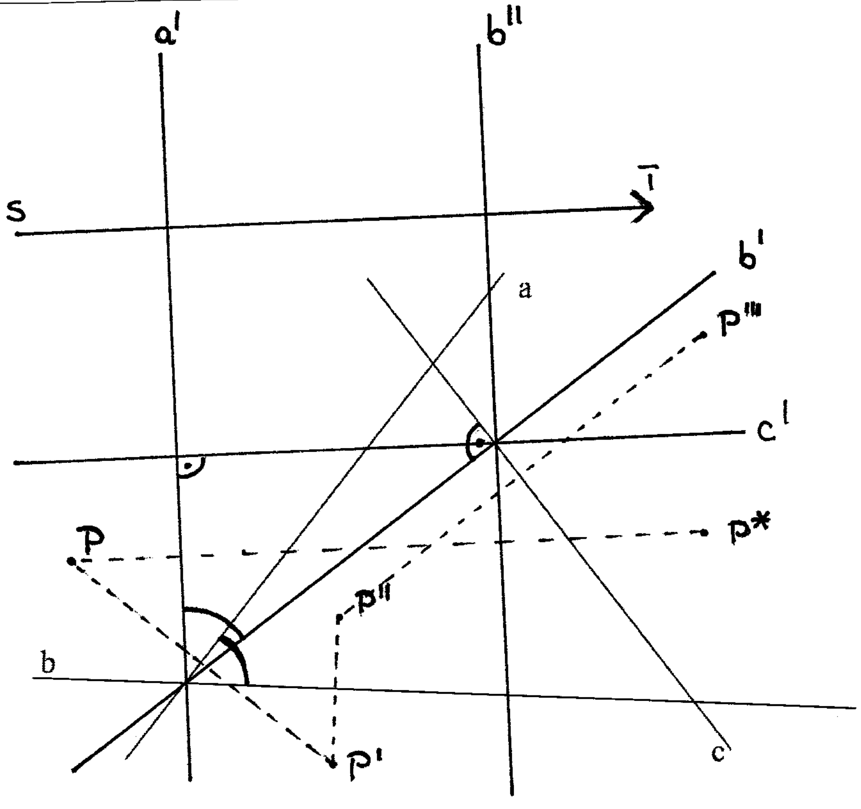
Nun werden b' und c verdreht, so dass $c' \perp a'$. Damit sind $b'' \parallel a'$

Es gilt $S_c \circ S_{b'} = S_{c'} \circ S_{b''}$

Die Spiegelungen an a' und b'' können durch eine Verschiebung ersetzt werden. Der Verschiebungsvektor $\overrightarrow{ST}$ ist parallel zu c', da $ST \perp a'$ (und b'') und $a' \perp c'$.

Insgesamt gilt: $S_c \circ S_b \circ S_a = S_c \circ S_{b'} \circ S_{a'} = S_{c'} \circ S_{b''} \circ S_{a'} = S_{c'} \circ V_{\overrightarrow{ST}}$

b)



$S_a(P) = P'$

$S_b(P') = P''$

$S_c(P'') = P'''$

$V_{\overrightarrow{ST}}(P) = P^*$

$S_{c'}(P^*) = P'''$

5

5.

5. Verdrehter Tetraeder. Beschriften Sie die übrigen Ecken.