Reimund Albers, Einführung in die Mathematik II, SoSe 05

Übung 6, Lösungsskizzen

1. „roter Faden": Über Kongruenzsätze beweist man
$|EF| = |FG|$, $|EF| = |GH|$, $|EF| = |HE|$.

Dann muss man nachweisen, dass wenigstens einer der vier Innenwinkel $90°$ groß ist.

Beweis von $|EF| = |FG|$ über $\triangle EBF \cong \triangle FCG$

$|BF| = |CG|$ nach Vorauss.

$|EB| = |FC|$ die „Reststrecken" sind auch gleich lang

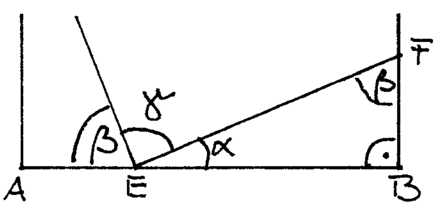
$|\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle FCG| = 90°$, da Winkel des Quadrats

$\Rightarrow \triangle EBF \cong \triangle FCG$ nach SWS

$\Rightarrow |EF| = |FG|$ q.e.d.

Analog zeigt man die Gleichheit der anderen Seitenlängen.

Beweis, dass $|\sphericalangle FEH| = 90°$



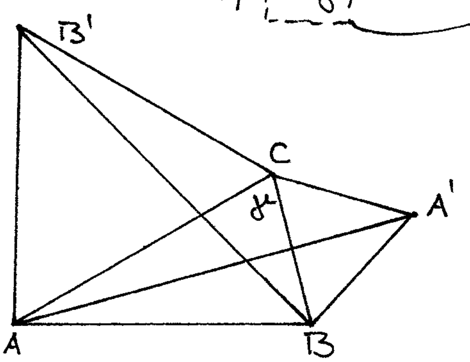
$\triangle AEH \cong \triangle EBF \Rightarrow |\sphericalangle HEA| = |\sphericalangle EFB| = \beta$

$\triangle EBF$: $\alpha + \beta + 90° = 180°$

Linie AEB: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ → Vergleich liefert $\gamma = 90°$

q.e.d.

2.



Man kann sehen, dass wohl $\triangle AA'C \cong \triangle B'BC$ ist

Beweis: $\triangle AA'C$ $\triangle B'BC$

$|AC| = |B'C|$, da $\triangle ACB'$ gleichseitiges Dreieck

$|CA'| = |CB|$, da $\triangle BA'C$ gleichseit. Dreieck

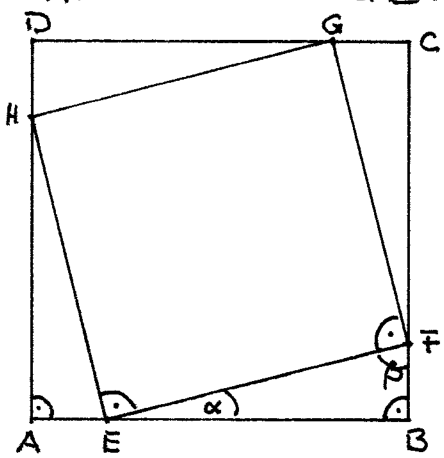
$|\sphericalangle A'CA| = |\sphericalangle B'CB| = \gamma + 60°$

$\Rightarrow \Delta AA'C \cong \Delta B'BC$ nach SWS

$\Rightarrow$ Die entsprechenden Seiten $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ sind gleich lang

HAUSÜBUNGEN

3.



Im ΔEBF gilt $\alpha + \beta + 90° = 180°$

Entlang der Strecke $\overline{AB}$ gilt

$|\sphericalangle HEA| + 90° + \alpha = 180° \Rightarrow |\sphericalangle HEA| = \beta$

Betrachte ΔHAE und ΔEBF

$|AE| = |BF|$ Vorauss.

$|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle FBE| = 90°$

$|\sphericalangle HEA| = |\sphericalangle EFB| = \beta$

Also sind ΔHAE und ΔEBF kongruent nach WSW

$\Rightarrow |HE| = |EF|$

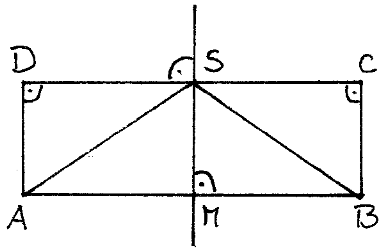
Entsprechend kann man zeigen, dass $|\sphericalangle CFG| = \alpha$ und dann

$\Delta EBF \cong \Delta FCG \Rightarrow |EF| = |FG|$

Damit ist EFGH ein Viereck mit drei gleich langen Seiten und eingeschlossenen rechten Winkeln $\Rightarrow$ $\Delta EFGH$ ist ein Quadrat q.e.d.

Hier kann man durch die gegebenen 90° Winkel bei E und F auf die Größen der anderen Winkel schließen. In 1. musste man die 90°-Größe abschließend beweisen.

4.



Der Winkel zwischen DC und MS ist 90°, da Stufenwinkel zu $\sphericalangle BMS$.

ABCD ist Rechteck, d.h. speziell

$AB \parallel CD$ und $|\sphericalangle ADS| = |\sphericalangle SCB| = 90°$

ΔASD ΔBCS

$|AS| = |BS|$, da S auf Mittelsenkr.

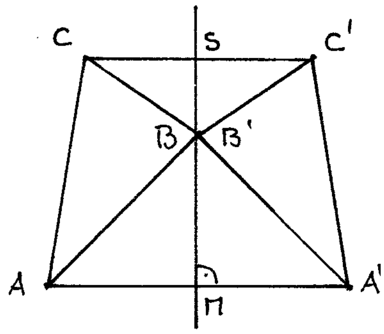
$|\sphericalangle ADS| = |\sphericalangle SCB| = 90°$

$|AD| = |BC|$ Eigenschaft Rechteck

$\Delta ASD \cong \Delta BCS$ nach SsW

$\Rightarrow |DS| = |SC|$

5.



a) Da $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, ist $|AB| = |A'B|$ $\Rightarrow$ B liegt auf der Mittels. von $\overline{AA'}$ (Satz zur Mittelsenkrechten)

b) zu zeigen ist i) $|CS| = |SC'|$ und ii) $|\sphericalangle B'SC'| = 90°$

$\Delta BSC \qquad \Delta B'C'S$

$|BS| = |BS|$ Tautologie

$|BC| = |B'C'|$ da $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

$|\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle C'B'S|$ da $|\sphericalangle ABM| + |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle SBC| = 180°$

$|\sphericalangle MB'A'| + |\sphericalangle A'B'C'| + |\sphericalangle C'B'S| = 180°$

gleich, siehe Beweis Mittelsenkr. — gleich, da Seitelwinkel

$\Delta BSC \cong \Delta B'C'S$ nach SWS

Damit gilt $|CS| = |SC'|$

und $|\sphericalangle CSB| = |\sphericalangle B'SC'|$. Wegen $|\sphericalangle CSB| + |\sphericalangle B'SC| = 180°$

$\Rightarrow \quad |\sphericalangle CSB| = |\sphericalangle B'SC'| = 90°$

WARNUNG vor folgendem Fehlschluss:

Wegen $|BC| = |BC'|$ gilt, dass $B = B'$ auf der Mittelsenkrechten von $\overline{CC'}$ liegt. Das beweist aber nicht, dass beide Mittelsenkrechten gleich sind.

6. $\Delta A'BA \qquad \Delta C'BC$

$|AB| = |BC|$ ① da Seiten des gleichseitigen Dreiecks

$|\sphericalangle CBA'| = |\sphericalangle CBC'| + 60° = |\sphericalangle ABA'| + 60° \quad \Rightarrow$

$|\sphericalangle ABA'| = |\sphericalangle CBC'|$ ②

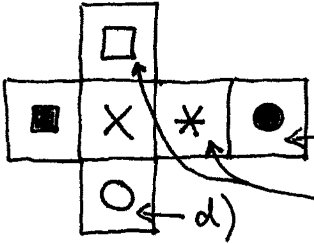
$\left.\begin{array}{l} |\sphericalangle BC, p| = 60° \Rightarrow |\sphericalangle C'CB| = 120° \\ |\sphericalangle BAC| = 60° \Rightarrow |\sphericalangle A'AB| = 120° \end{array}\right\} \Rightarrow$

$|\sphericalangle A'AB| = |\sphericalangle C'CB|$ ③

①, ②, ③ $\Rightarrow \Delta A'BA \cong \Delta C'BC$ nach WSW

Durch „Aufklappen" der sichtbaren drei Flächen findet man: Zum Netz ① gehören a) e) f) h)

Zu ② gehören dann b), c) d) g)



1. Würfel d) liefert ○
2. Würfel c) liefert ●
3. Würfel b) liefert □, *