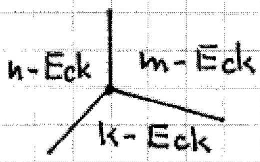
Reimund Albers, Einführung in die Mathematik II

3. Übung, Lösungsskizzen

1



Ecke im n-Eck: $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$

Ecke im m-Eck: $\frac{m-2}{m} \cdot 180^\circ$

Ecke im k-Eck: $\frac{k-2}{k} \cdot 180^\circ$

Wenn die Ecken lückenlos zusammenpassen sollen, muss die Summe 360° ergeben. Also

$$\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ + \frac{m-2}{m} \cdot 180^\circ + \frac{k-2}{k} \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

b) Division durch 180°

$$\frac{n-2}{n} + \frac{m-2}{m} + \frac{k-2}{k} = 2 \qquad \text{Zerlegen der Brüche}$$

$$1-\frac{2}{n} + 1-\frac{2}{m} + 1-\frac{2}{k} = 2 \qquad |-3$$

$$-\frac{2}{n} - \frac{2}{m} - \frac{2}{k} = -1 \qquad |\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \qquad \left|-\frac{1}{m} - \frac{1}{k}\right.$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{k} = \frac{mk-2k-2m}{2mk} \qquad |\text{Kehrwert}$$

$$n = \frac{2mk}{mk-2k-2m} = \frac{2k\cdot m}{(k-2)\cdot m - 2k}$$

Probieren: $k = 3 \Rightarrow n = \frac{6m}{m-6}$

$m \geq 7$, da sonst n negativ

$m-6$ Teiler von 6: $m-6 = 1 \Rightarrow m = 7,\ n = 42$

$m-6 = 2 \Rightarrow m = 8,\ n = 24$

$m-6 = 3 \Rightarrow m = 9,\ n = 18$

$m-6 = 6 \Rightarrow m = 12,\ n = 12$

$m-6 = 2^2 \Rightarrow m = 10 \quad n = 15$

$m-6 = 3^2 \Rightarrow m = 15 \quad n = 10$

$m-6 = 6^2 \Rightarrow m = 42 \quad n = 7$

Probieren: $k=4 \Rightarrow n = \dfrac{8m}{2m-8} = \dfrac{4m}{m-4}$

$m \geq 5$, $m-4$ Teiler von 4:

$m-4=1 \Rightarrow m=5 \quad n=20$

$m-4=2 \Rightarrow m=6 \quad n=12$

$m-4=4 \Rightarrow m=8 \quad n=8$

$m-4=4^2 \Rightarrow m=20 \quad n=5$

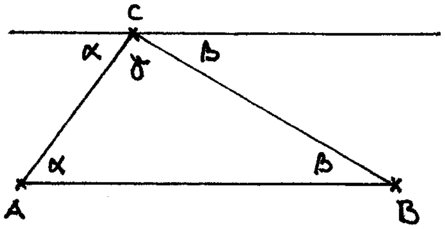
Weitere Lösungen

$k=5 \quad m=5 \quad n=10$

$k=6 \quad m=6 \quad n=6$

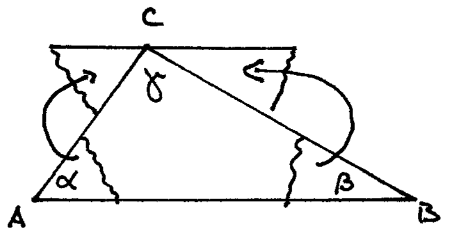
2. Beispiele:

I) der klassische Beweis



Man zeichnet durch C eine Parallele zu AB. Der Beweis erfolgt über den Satz von Stufen/Wechselwinkeln an Parallelen. Der Beweis ist a) exakt, b) seine Anschaulichkeit ist nur indirekt gegeben, da er auf der Anschaulichkeit der Gleichheit der Wechselwinkel beruht. c) Er ist nicht (in dieser Form) auf Vierecke erweiterbar

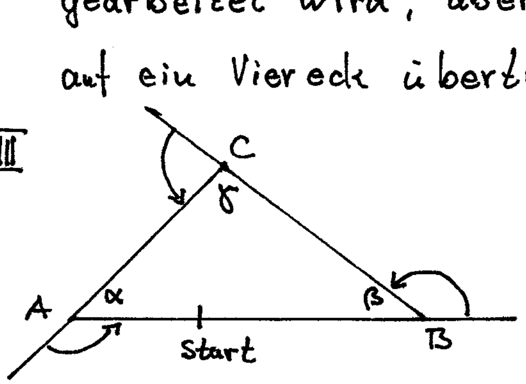
II) Experimentelle Begründung



Ein Dreieck wird aus Papier ausgeschnitten, die Ecken bei A und B abgerissen und bei C angelegt.

Der Beweis ist a) nicht exakt, da hier am Beispiel gearbeitet wird, aber b) sehr anschaulich und c) auf ein Viereck übertragbar ist.

III)



Man läuft ein Mal um das Dreieck herum. In den Ecken dreht man sich um die mit Pfeilen markierten Winkel. Wieder am Start hat man sich um 360° gedreht: $(180° - \beta) + (180° - \gamma) + (180° - \alpha) = 360°$ auflösen ergibt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ b) Anschaulicher Ansatz, aber unanschauliche Umformungen. a) logisch exakt und c) gut auf Vierecke übertragbar.

3\. a) Für die Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks gilt $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Im gleichseitigen Dreieck ist mit $60°$ das Minimum der möglichen Winkel erreicht. Stoßen in einem Eckpunkt 7 oder mehr Vielecke zusammen, ist die Winkelsumme über $360°$.

Formel

Die Innenwinkel sind stets kleiner als $180°$. Folglich können zwei Vielecke nie die Winkelsumme von $360°$ erreichen. Es müssen wenigstens 3 Vielecke in einem Eckpunkt zusammenstoßen.

b) Winkelsumme $= 360°$

$$\frac{a-2}{a} \cdot 180° + \frac{b-2}{b} \cdot 180° + \frac{c-2}{c} \cdot 180° + \frac{d-2}{d} \cdot 180° = 360° \quad |:180°$$

$$1 - \frac{2}{a} + 1 - \frac{2}{b} + 1 - \frac{2}{c} + 1 - \frac{2}{d} = 2 \quad |-4$$

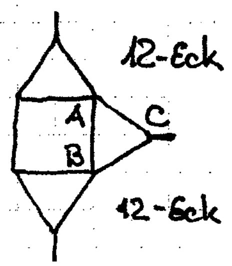
$$-\frac{2}{a} - \frac{2}{b} - \frac{2}{c} - \frac{2}{d} = -2 \quad |:(-2)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$$

c) $a = b = 3 \quad c = 4$

$$\frac{1}{d} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12}{12} - \frac{4}{12} - \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

$d = 12$ In jedem Eckpunkt sollen zwei 3-Ecke, ein Quadrat und ein 12-Eck zusammenstoßen



A erfüllt die Bedingung. Um in B die Bedingung zu erfüllen, müssen ein 12-Eck und ein 3-Eck angelegt werden Reihenfolge 4 3 12 3

Dann stoßen in C ein 3-Eck und 2 12-Ecke zusammen!

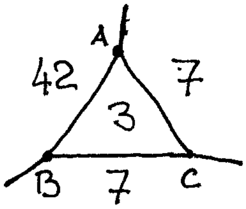
Keine Parkettierung möglich!

4. a) $n = 3$: $\gamma_3 = 180^\circ \cdot \frac{1}{3} = 60^\circ$

$m = 7$: $\gamma_7 = 180^\circ \cdot \frac{5}{7} = 128\frac{4}{7}^\circ$

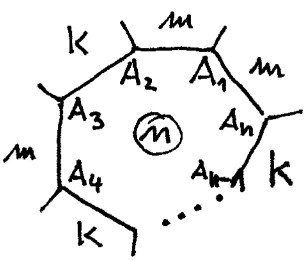
$k = 42$: $\gamma_{42} = 180^\circ \cdot \frac{40}{42} = \frac{30 \cdot 40}{7} = 171\frac{3}{7}^\circ$

$$\gamma_3 + \gamma_7 + \gamma_{42} = 360^\circ$$



Man beginnt mit einem Dreieck ABC. In A legt man ein 7-Eck und ein 42-Eck an. Dann muss in B ein 7-Eck ergänzt werden. Dann hat man in C ein Dreieck (60°) und zwei 7-Ecke ($128\frac{4}{7}^\circ$). Damit ist C nicht gleichwertig zu A und B.

b)



Wir beginnen mit einem n-Eck. Die Ecken seien $A_1, A_2, \dots, A_n$. O.B.d.A. legen wir an die Kante $\overline{A_1 A_2}$ ein m-Eck. Dann muss an die Kante $\overline{A_2 A_3}$ ein k-Eck gelegt werden. Kante $\overline{A_3 A_4}$ m-Eck.

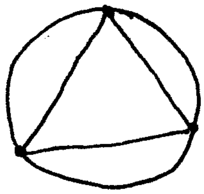
Allgemein: $\overline{A_u A_{u+1}}$ u ungerade m-Eck anlegen

$\overline{A_g A_{g+1}}$ g gerade k-Eck anlegen

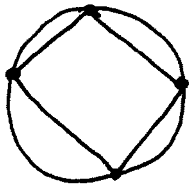
$\Rightarrow$ An die Kante $\overline{A_{n-1} A_n}$ wird ein k-Eck angelegt, denn n ist ungerade, also n−1 gerade.

Dann muss an die Kante $\overline{A_n A_1}$ ein m-Eck angelegt werden. $\Rightarrow$ Im Punkt A_1 stoßen ein n-Eck und 2 m-Ecke zusammen Widerspruch!

5.



$n=3$



$n=4$

$k=6 \quad E=3 \quad F=4 \qquad k=8 \quad E=4 \quad F=5$

a) Allgemein gilt $k=2n$, den zwischen zwei Ecken laufen immer zwei Kanten: die gerade Strecke und der Kreisbogen

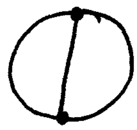
$E=n$ laut Konstruktion

$F=n+1$ denn am Kreis gibt es es n Kreisabschnitte und ein n-Eck in der Mitte

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow F+E = n+1+n = 2n+1 \\ k = 2n \end{array}\right\} \; F+E=k+1 \text{ ist für alle } n \text{ erfüllt.}$$

b) Für alle $n \geq 2$ gilt $F_n + E_n = k_n + 1$

Induktionsanf.: $n=2$



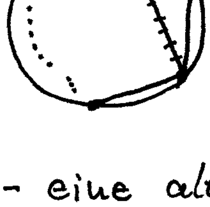
$E_2 = 2 \quad F_2 = 2 \quad k_2 = 3$

Also ist $F_n + E_n = k_n + 1$ für $n=2$ erfüllt

Ind. vorauss.: $F_n + E_n = k_n + 1$ ist erfüllt

Ind. behaupt.: $F_{n+1} + E_{n+1} = k_{n+1} + 1$

Ind. beweis:



Setzt man zu n Punkten einen $n+1$. Punkt hinzu, so

- erhöht sich die Eckenzahl um 1: $E_{n+1} = E_n + 1$
- eine alte Kante wird entfernt (+++++) und zwei neue Strecken zum $n+1$. Punkt hinzugefügt.

Außerdem wird der Bogen durch den $n+1$. Punkt in zwei Teile geteilt $\Rightarrow k_{n+1} = k_n + 2$

Die Fläche des inneren n-Ecks wird vergrößert zum n+1-Eck. Zum Kreis hin sind nun zwei Kreisabschnitte wo vorher nur einer war. $\Rightarrow F_{n+1} = F_n + 1$

$$F_{n+1} + E_{n+1} = F_n + 1 + E_n + 1 = F_n + E_n + 2$$

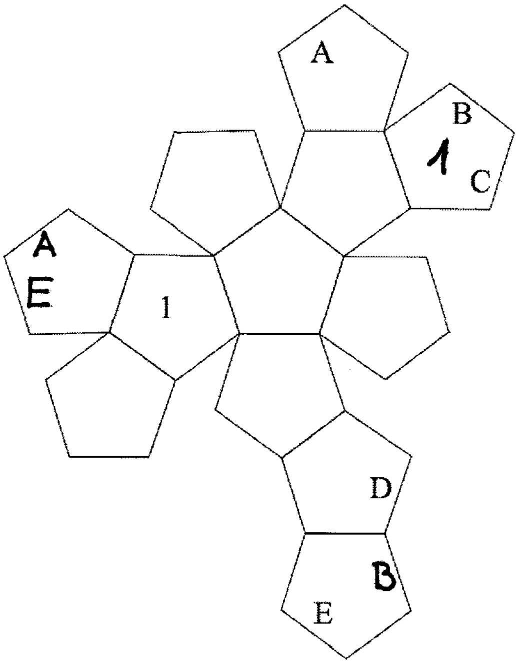
$$k_{n+1} + 1 = k_n + 2 + 1 = k_n + 3 = (F_n + E_n - 1) + 3$$

Ind. Vorauss.

gleich

Also $F_{n+1} + E_{n+1} = k_{n+1} + 1$ q.e.d.

6



C und D stoßen zusammen