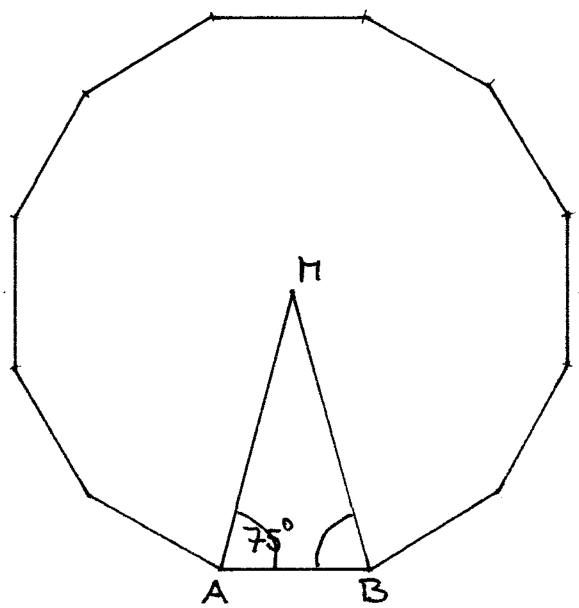
Reimund Albers Einführung in die Mathematik II SoSe 05

# 1. Übung Lösungsskizzen

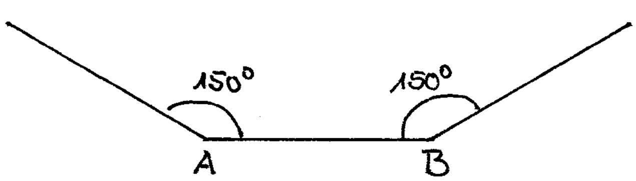
1. Weg: Man konstruiert über ein gleichseitiges Dreieck einen 60°-Winkel. Halbierung → 30° Halbierung → 15°. Aus dem 60°- und dem 15°-Winkel setzt man einen 75°-Winkel zusammen.




An die vorgegebene Strecke trägt man in A und B einen 75°-Winkel an. Der Schnittpunkt ist M. Um M schlägt man einen Kreis mit Radius $|MA|$. Das ist der Umkreis des Zwölfecks. Man kann nun die Streckenlänge $|AB|$ fortlaufend auf dem Kreis abtragen.

Variation: Man zeichnet einen 75°-Winkel und die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$

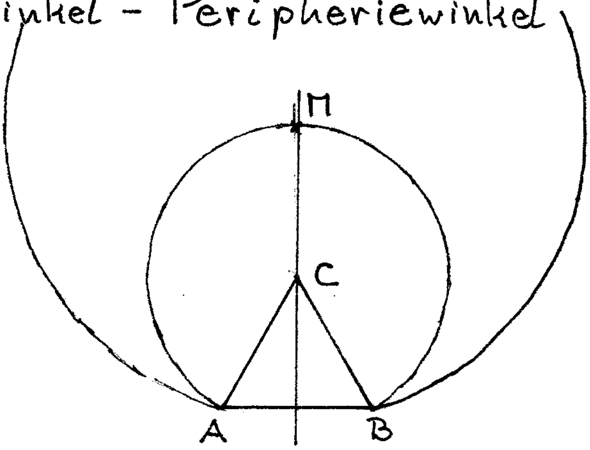
2. Weg: 60°-Winkel und 90°-Winkel ergeben einen 150°-Winkel.




In A und B trägt man einen 150°-Winkel an. Auf dem freien Schenkel trägt man die Länge von $|AB|$ ab. Das setzt man fort, bis ~~sich~~ das Zwölfeck komplett ist.

3. Weg. Zu $\overline{AB}$ konstruiert man das gleichseitige Dreieck. Neuer Punkt C. Um C schlägt man einen Kreis mit Radius $|CA|$. Die Mittelsenkrechte zu AB trifft den Kreis oberhalb von C in M. M ist der Mittelpunkt des Umkreises des

gesuchten Zwölfecks. Begründung: Mittelpunkt-winkel - Peripheriewinkel




Auf diesem Kreis kann man nun fortlaufend die Länge $|AB|$ abtragen.

2. $\phi_2 = \frac{1}{2}$ $\quad \phi_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ $\quad \phi_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$

$\phi_5 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$ Zähler und Nenner werden aus Fibonacci-Zahlen gebildet

$F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad F_3 = 2 \quad F_4 = 3 \quad F_5 = 5 \quad F_6 = 8$

$\phi_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis mit vollständiger Induktion

Induktionsanfang: $n=1$ $\quad \phi_1 = 1$ $\quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{1} = 1$ stimmt

Induktionsvorauss: $\phi_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$

Induktionsbeh.: $\phi_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$

Induktionsbeweis:

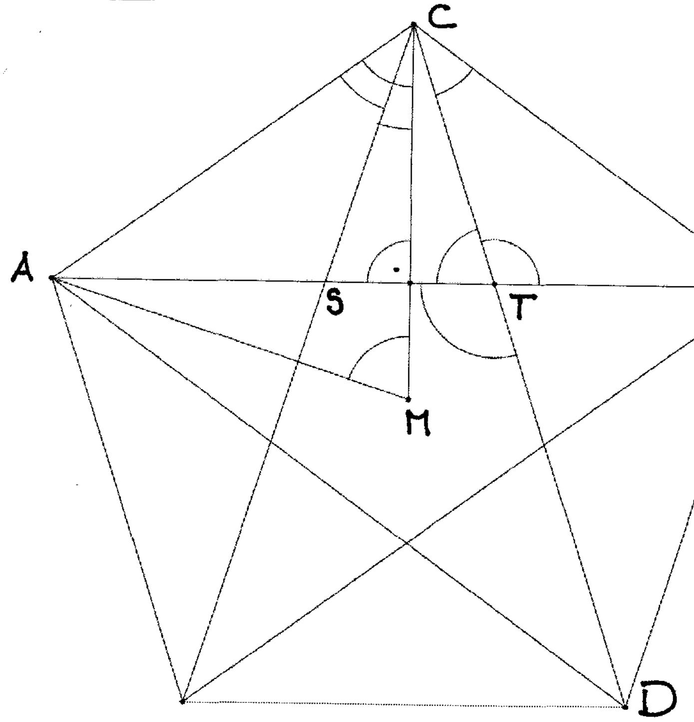
$$\phi_{n+1} = \frac{1}{1+\phi_n} = \frac{1}{1+\frac{F_n}{F_{n+1}}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+1}+F_n} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

Bildungsgesetz für Fibonacci-Z.

$\phi_6 = \frac{F_6}{F_7} = \frac{8}{13}$ $\quad \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

relativ. Fehler: $\Delta = \frac{\phi_6 - \phi}{\phi} \approx -0{,}0043 = -0{,}43\%$

3.




$|\sphericalangle CMA| = 72°$

$360° : 5$

$|\sphericalangle ACM| = 54°$

Basiswinkel im $\Delta AMC$

$|\sphericalangle ATD| = 108°$

Eckenwinkel im Fünfeck. Halber Eckenwinkel $\sphericalangle ACM$ war $54°$ groß.

$|\sphericalangle BTC| = 108°$ Scheitelwinkel zu $\sphericalangle ATD$

$|\sphericalangle CTA| = 72°$ Nebenwinkel zu $\sphericalangle BTC$

$|\sphericalangle TCB| = 36°$ Basiswinkel im $\Delta TBC$

$|\sphericalangle ACS| = 36°$ Kongruentes Dreieck zu $\Delta TBC$

$|\sphericalangle SCM| = 18°$ Differenz $|\sphericalangle ACM| - |\sphericalangle ACS|$

Hausübungen

4 a) $d = 1$ also $a - \frac{1}{a} = 1 \quad | \cdot a \quad \Rightarrow \quad a^2 - 1 = a \quad | - a$

$a^2 - a - 1 = 0$ Lösungsformel: $a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$

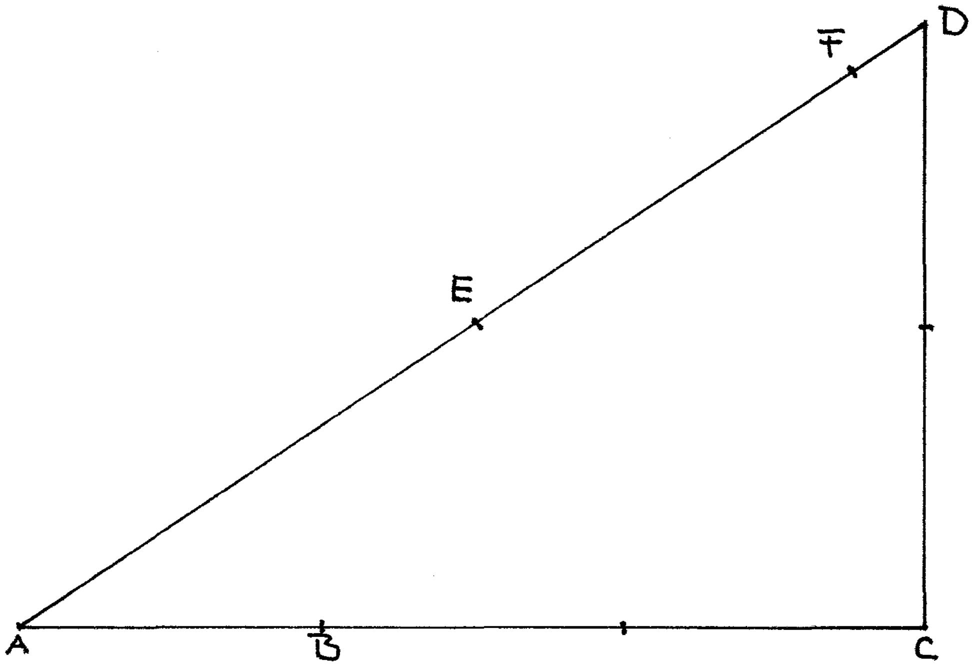
$a = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ Die Bedingung $a > 1$ wird nur von $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ erfüllt

b) $d = 3$, also $a - \frac{1}{a} = 3 \quad | \cdot a \quad \Rightarrow \quad a^2 - 1 = 3a \quad | - 3a$

$a^2 - 3a - 1 = 0$ Lösungsformel: $a = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 1}$

$a = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{13})$ positive Lösung: $a_3 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$

c)




Vorüberlegung: $13 = 9 + 4$ also $\sqrt{13}^2 = 3^2 + 2^2$

Also kann man $\sqrt{13}$ über den Satz von Pythagoras konstruieren mit den Katheten 3 und 2

Zeichne $\overline{AB}$. Verlängere $\overline{AB}$ über B auf die 3-fache Länge. Endpunkt C. Zeichne in C eine Senkrechte und trage das 2-fache von $\overline{AB}$ ab. Endpunkt D. Zeichne $\overline{AD}$ $\quad |AD| = \sqrt{13} \cdot |AB|$

Nun konstruiere ich den Mittelpunkt E von $\overline{AD}$.

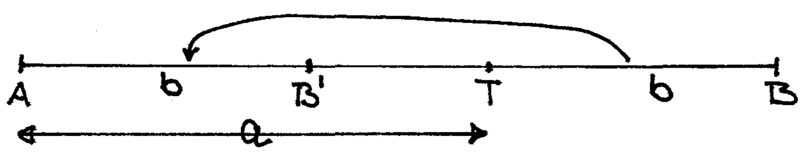
An $\overline{AE}$ hänge ich das $\frac{3}{2}$-fache von $\overline{AB}$.

Endpunkt F.

Probe durch Messen: $|AF| = 13{,}2\,\text{cm}$

$\frac{\sqrt{13}+3}{2} \approx 3{,}3 \qquad \frac{\sqrt{13}+3}{2} \cdot 4\,\text{cm} = 13{,}2\,\text{cm}$

5 a)




Vorauss. $\frac{a+b}{a} = \phi \qquad$ Zu zeigen ist $\frac{a}{b} = \phi$

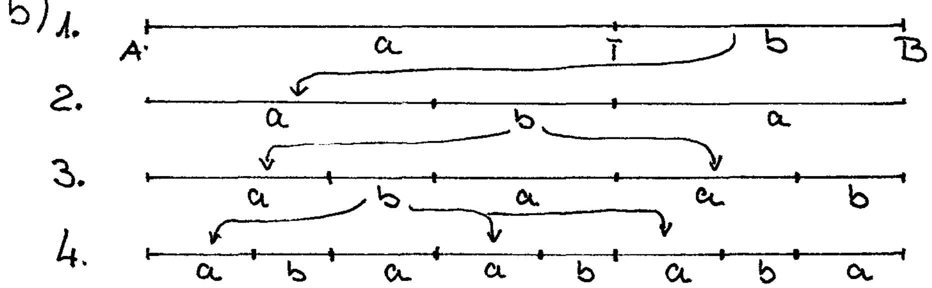
Beweis: $\frac{a+b}{a} = \phi \quad | \cdot a \quad \Rightarrow \quad a + b = \phi a \quad | - a$

$\Rightarrow b = \phi a - a = a \cdot (\phi - 1) \quad | : a \quad \Rightarrow \frac{b}{a} = \phi - 1$

nach Aufgabe 4a gilt $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$

also $\frac{b}{a} = \frac{1}{\phi}$ Kehrwert $\frac{a}{b} = \phi$

b)




ab

aba

abaab

abaababa

| Stufe | 1. | 2. | 3. | 4. |
|---|---|---|---|---|
| Anzahl a | 1 | 2 | 3 | 5 |
| Anzahl b | 1 | 1 | 2 | 3 |
| Gesamt | 2 | 3 | 5 | 8 |

} offensichtlich Fibonacci-Zahlen

Jedes „alte" a wird zu ab

Jedes „alte" b wird zu „neuem" a

Beispiel: „Wort" $w_3 = a\ b\ a\ a\ b$

„Wort" $w_4 = ab\ a\ ab\ ab\ a$

Jedes neue „Wort" entsteht auch dadurch, dass man das vorhergehende „Wort" hinschreibt und das vorvorhergehende „Wort" anhängt.

Beispiel $w_4 = \underbrace{abaab}_{w_3}\underbrace{aba}_{w_2}$

also allgemein: $w_{n+1} = w_n \,\&\, w_{n-1}$

6 räumliches Vorstellungsvermögen

a) geht: A – F, B – D, C – E

b) geht nicht: A auf F

c) geht nicht: A auf E

d) geht: A – E, B – D, C – F

e) geht: B – E, A – D, C – F