Reimund Albers, Einführung i. d. Mathematik II, SoSe 05

Klausur, Lösungen

1a) Winkel größe in der Ecke eines regelmäßigen n-Ecks:

$$180° \cdot \frac{n-2}{n}$$

8-Eck: 135°

4-Eck: 90°

8-Eck: 135°

Summe 360°

Damit erfüllt die Kombination 8-, 8-, 4-Eck die Winkelbedingung (1,5)

b) allgemein k-Eck, n-Eck, 2n-Eck

$$180° \frac{k-2}{k} + 180° \frac{n-2}{n} + 180° \frac{2n-2}{2n} = 360° \quad | :180°$$

Ansatz (1)

$$1 - \frac{2}{k} + 1 - \frac{2}{n} + 1 - \frac{2}{2n} = 2 \quad | -3$$

$$-\frac{2}{k} - \frac{2}{n} - \frac{1}{n} = -1 \quad | \cdot(-1)$$

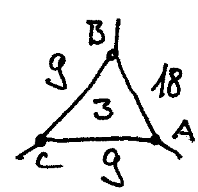
$$\frac{2}{k} + \frac{3}{n} = 1$$

(2)

c) $k = 3$: $\frac{2}{3} + \frac{3}{n} = 1 \Rightarrow \frac{3}{n} = \frac{1}{3} \Rightarrow n = 9 \quad 2n = 18$ (0,5)

Also: Ein 3-Eck, 9-Eck und 18-Eck passen in einer Ecke zusammen

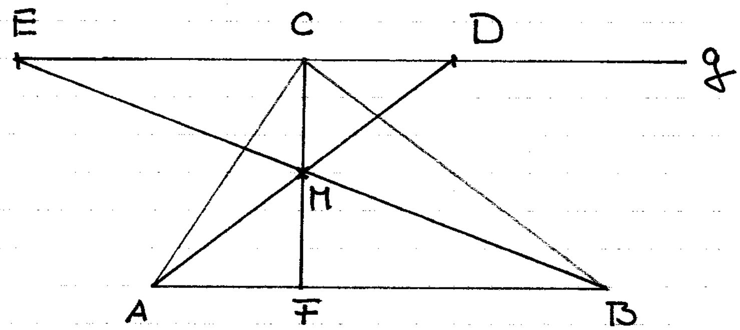
Es ist keine globale Lösung, denn um das 3-Eck stoßen in A und B zwar ein 3-, 9- und 18-Eck zusammen, nicht aber in C.



(0,5)

(1,5)

2. a)



1,5

b) Betrachte ΔAFM und ΔMDC

$|FM| = |MC|$ nach Konstruktionsvorschr.

$|\sphericalangle FAM| = |\sphericalangle CDM|$ Wechselwinkel an Parall.

$|\sphericalangle MFA| = |\sphericalangle MCD|$ " " "

$\Delta AFM \cong \Delta MDC$ nach Kongruenzsatz WSW 2

Folgerung: $|AF| = |CD|$ 0,5

Betrachte

ΔMFB und ΔMCE

$|MF| = |MC|$ nach Konstruktionsvorschr.

$|\sphericalangle BFM| = |\sphericalangle ECM|$ Wechselwinkel

$|\sphericalangle FMB| = |\sphericalangle CME|$ Scheitelwinkel

$\Delta MFB \cong \Delta MCE$ nach Kongruenzsatz WSW 2

Folgerung $|FB| = |CE|$ 0,5

$\Rightarrow |AB| = |AF| + |FB| = |DC| + |CE| = |DE|$ q.e.d.

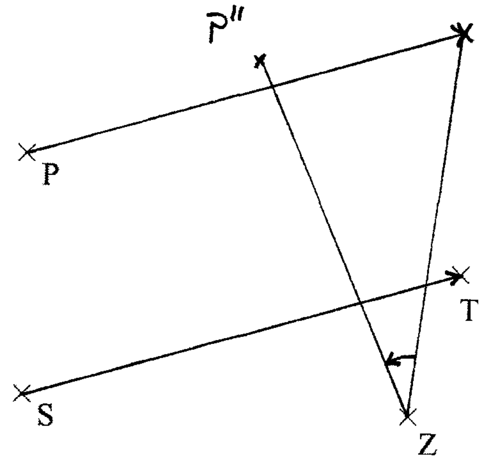
0,5

7

3

3.

a)



1

b) Die Verschiebung lässt sich zerlegen in zwei Spiegelungen an zwei Geraden a und b, die senkrecht zum Verschiebungsvektor sind und einen Abstand von der halben Länge des Verschiebungsvektors haben. 1

Die Drehung lässt sich zerlegen in zwei Spiegelungen an zwei Geraden c, d, die sich in Z schneiden und einen Winkel von $\frac{\alpha}{2}$ ($= 15^\circ$) einschließen. (c und d sind als Paar um Z drehbar) 1

i) erst Verschiebung, dann Drehung

$D \circ V = S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a$. Wählt man c senkrecht zum Verschiebungsvektor, und b durch Z, so ist $b = c$ also $S_d \circ \underbrace{S_c \circ S_b}_{id} \circ S_a = S_d \circ S_a$. a und d sind nicht parallel, sondern schneiden sich im neuen Drehzentrum Z'. Folglich ist $S_d \circ S_a$ eine Drehung. 2

ii) erst Drehung, dann Verschiebung

$V \circ D = S_b \circ S_a \circ S_d \circ S_c$ Wählt man d senkrecht zum Verschiebungsvektor und a durch Z, so ist $a = d$, also $S_b \circ \underbrace{S_a \circ S_d}_{id} \circ S_c = S_b \circ S_c$ b und c schneiden sich im neuen Drehzentrum Z''. Folglich ist $S_b \circ S_c$ eine Drehung 2/7

4. a) Wird $0 \to 0$ abgebildet, so gilt

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \vec{x}$$ Dabei ist $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ das Bid

des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ das Bild von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1

b) Bei einer längentreuen Abbildung müssen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf Vektoren mit dem Betrag 1 abgebildet werden. Im Beispiel ist aber weder $\begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ noch $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Vektor ~~der Länge~~ vom Betrag 1. Beide sind größer 1

2

c) involutorisch = selbstinvers

also $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Ansatz 1

$$\begin{pmatrix} 1+0{,}5c & 0{,}5+0{,}5d \\ c+cd & 0{,}5c+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Multipl 1

$1+0{,}5c = 1 \Rightarrow c = 0$

$0{,}5+0{,}5d = 0 \Rightarrow d = -1$ Lösen 1

Prüfen, ob dann die übrigen beiden Gleichungen erfüllt sind: $c + cd = 0$ stimmt

$0{,}5c + d^2 = 1$ stimmt

prüfen 1

also $c = 0 \quad d = -1$

7

5

5. a) $P(5;0)$

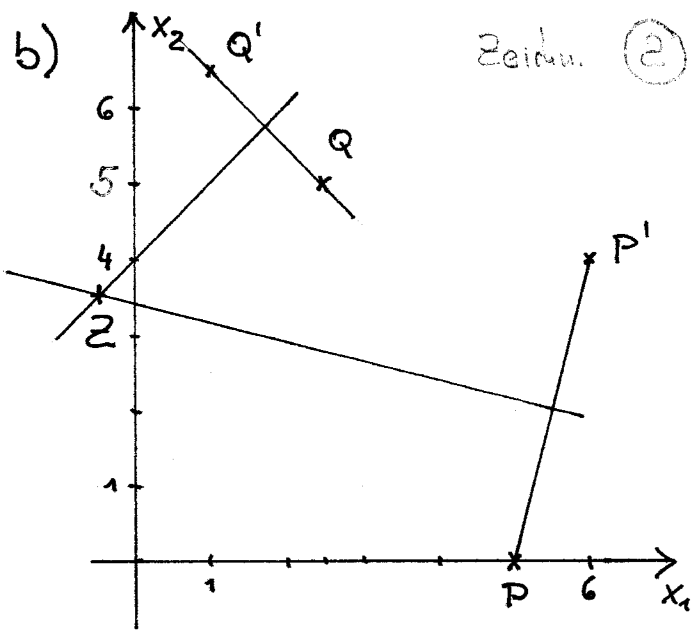
$$\vec{p}\,' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad P'(6;4)$$

$Q(2{,}5;5)$ 1

$$\vec{q}\,' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3+2 \\ 1{,}5+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6{,}5 \end{pmatrix}$$

$Q'(1;6{,}5)$

b)



Zeichn. 2

Ich konstruiere zu den Strecken $\overline{PP'}$ und $\overline{QQ'}$ die Mittelsenkrechten. Ihr Schnittpunkt ist das Drehzentrum Z 1

Begründung: Wegen $|PZ| = |P'Z|$ muss Z auf der Mittelsenkrechten von $\overline{PP'}$ liegen. 0,5

Zeichnerische Lösung: $Z(-0{,}5;3{,}5)$ 0,5

c) Das Drehzentrum ist der (einzige) Fixpunkt der Abbildung. Ansatz: $\vec{x}\,' = \vec{x}$

Ansatz 1

$$\begin{array}{l|l} 0{,}8x_1 - 0{,}6x_2 + 2 = x_1 & -0{,}2x_1 - 0{,}6x_2 = -2 \quad \cdot 3 \\ 0{,}6x_1 + 0{,}8x_2 + 1 = x_2 & 0{,}6x_1 - 0{,}2x_2 = -1 \quad + \end{array}$$

Lösen 2

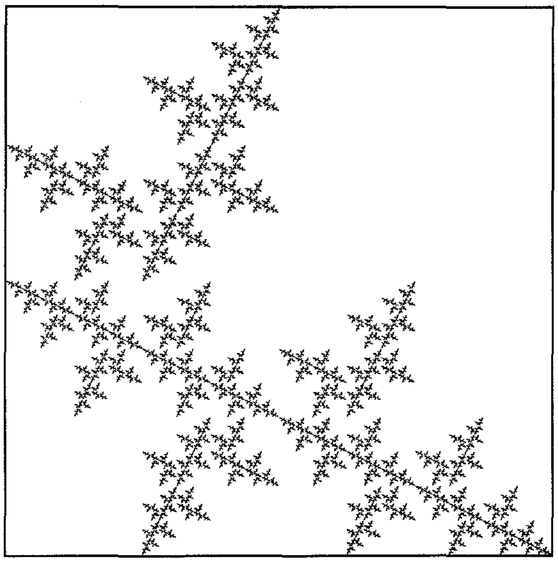
$$-2x_2 = -7 \Rightarrow x_2 = 3{,}5 \qquad -0{,}2x_1 - 2{,}1 = -2$$

$$-0{,}2x_1 = 0{,}1 \quad |\cdot(-5) \qquad x_1 = -0{,}5$$

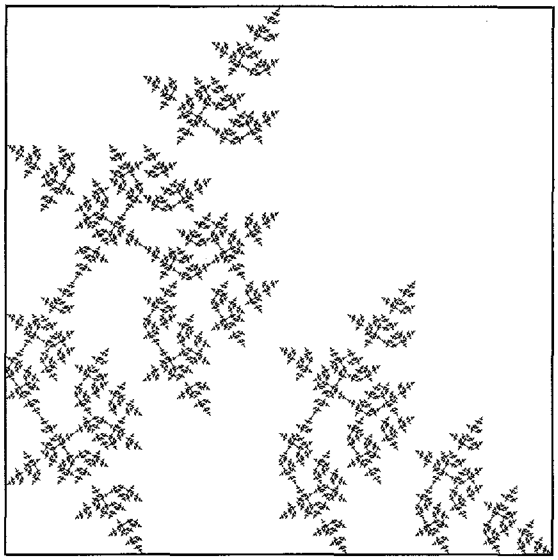
Also hat das Drehzentrum die Koordinaten $Z(-0{,}5;3{,}5)$

8

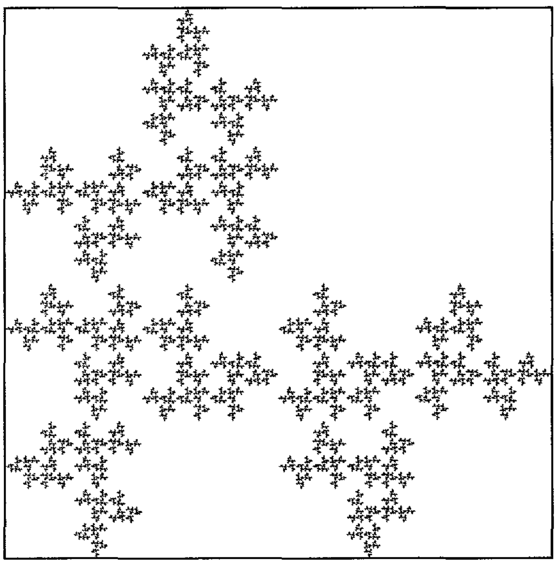
6. Bestimmen Sie die einzelnen Abbildungen des IFS, die zu den abgebildeten Fraktalen führen .



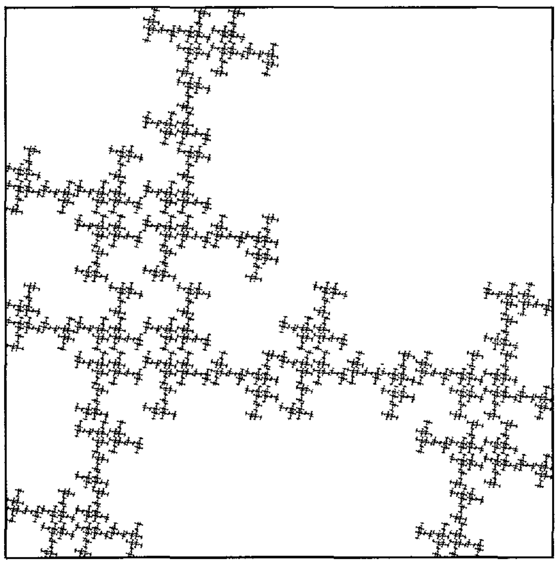
D_{90}	
D_{180}	D_0



D_{90}	
S_0	D_0



S_{90}	
D_{270}	S_0



D_{90}	
D_{270}	D_{180}

je Abbild $\frac{1}{2}$

6