Wintersemester 2004/05
Reimund Albers

(14.) Übung
Vollständige Induktion

Übungen (insbesondere zur Klausurvorbereitung)

1. Beweisen Sie die Summenformeln durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

   a. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

   b. $\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

   c. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)\cdot(2n+1)$

   d. $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}-1$

   e. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

   f. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

   g. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$

   h. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

   i. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

   j. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$

   k. $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

2. Beweisen Sie die nachfolgenden Teilereigenschaften durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

   a. $3 \mid 13^n + 2$

   b. $4 \mid 5^n + 7$

   c. $7 \mid 50^n + 6$

   d. $7 \mid 2^{3n} + 13$

   e. $8 \mid 3^{2n} - 1$

   f. $5 \mid 7^n - 2^n$

   g. $3 \mid 2^{3n} - 5^n$

Beweisen Sie die nachfolgenden Aussagen immer mit vollständiger Induktion. Zu manchen Aussagen kann der Beweis auch anders geführt werden. Darüber sollten Sie auch kurz nachdenken, es ist hier aber nicht die wesentliche Anforderung.

3. Das Produkt von drei aufeinander folgenden, natürlichen Zahlen ist immer durch 6 teilbar.

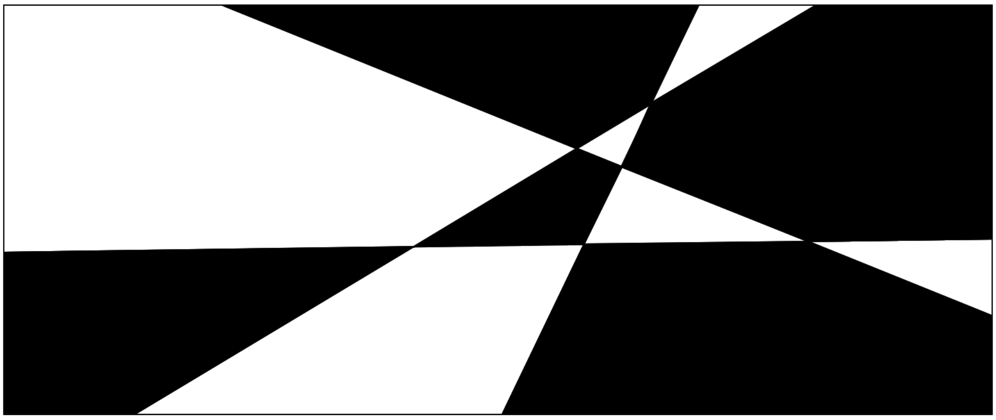
4. Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

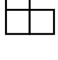
5. Die Anzahl der Permutationen von *n* Dingen ist *n*!.

6. In einem *n*-Eck ist die Anzahl aller Verbindungslinien $V(n)$ zwischen den Punkten um *n* größer als die Anzahl der Diagonalen $D(n)$. Kurz $V(n) = D(n) + n$

7. Zu den Fibonacci-Zahlen $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, \ldots$ mit $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$:
   a. (*insbesondere für die, die von den bisherigen Aufgaben eher gelangweilt waren*)
      Beweisen Sie die Gültigkeit der Formel von Binet:
      $$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$
      Hilfestellung: Rechnen Sie durch schlichtes Ausmultiplizieren die folgende Umformung nach: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} + 1 = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2$. Diese ist beim Beweis hilfreich.
   b. Beweisen Sie den Zusammenhang: $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^{\,2} = (-1)^2$

8. Teilt man ein Rechteck durch Geraden in Teilflächen, so kann man die Teilflächen immer so durch Schwarz und Weiß färben, dass Teilflächen, die an einer Kante zusammenstoßen, verschiedene Farben haben.



9. Gegeben ist ein Quadrat der Seitenlänge 2^n. Es ist also in $\left(2^n\right)^2$ Einheitsquadrate eingeteilt. Man bedeckt irgendwo ein Einheitsquadrat mit einem Quadratstein. Nun hat man nur noch Steine aus drei Einheitsquadraten der Form 

   Beweisen Sie, dass man das Quadrat (ohne das eine Einheitsquadrat) mit diesen Dreiersteinen lückenlos zudecken kann.

   An den hier aufgezeichneten 8x8-Quadraten können Sie es einmal ausprobieren.