Wintersemester 2004/05
Reimund Albers

13. Übung
Kombinatorik

Präsenzübungen

1.
   a. Welche Auswirkungen haben die Unterscheidungen „mit - ohne Zurücklegen" und „mit - ohne Berücksichtigung der Reihenfolge" auf die Anzahl der Möglichkeiten?
   b. Begründen Sie damit, welche Zahl für jedes $n \geq 2,\ k \in \mathbb{N}_0$ am größten, am kleinsten und zwischen diesen Extremen sein muss:
   $\binom{n}{k}, \binom{n+k-1}{k}, n^k$ oder $\frac{n!}{(n-k)!}$
   c. Welche Zahlen lassen sich schwer vergleichen? Warum ist das so?

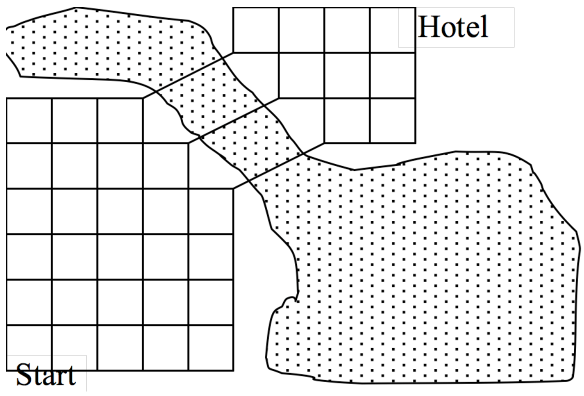
2. Beim Urnenmodell ist beim Ziehen von k Kugeln aus n mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge die Anzahl der Möglichkeiten n^k. Berücksichtigt man die Reihenfolge nicht, ist man verleitet, als Anzahl der Möglichkeiten $\frac{n^k}{k!}$ anzunehmen.
   a. Setzen Sie $n = 5$ und $k = 3$ und berechnen Sie $\frac{n^k}{k!}$. Was spricht offensichtlich gegen diesen Lösungsansatz?
   b. Bestimmen Sie
   i) das kleinste n ii) ein weiteres n
   für das für k = 8 $\frac{n^k}{k!}$ eine natürliche Zahl ist.
   c. Begründen Sie durch kombinatorische Argumente, warum der Ansatz $\frac{n^k}{k!}$ keine Lösung für das Ziehen mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ist.

   Wenn noch Zeit ist:
   d. Geben Sie einen Algorithmus an für b) i) für allgemeines k.

Hausübungen (Abgabe: Do, 3.2.05)

3. (eine Fleißaufgabe)
   a. Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, mit denen man $k = 3$ Zahlen aus $n = 5$ ziehen kann, wobei die gezogene Zahl wieder zurückgelegt wird und bei den Ergebnissen die Reihenfolge nicht beachtet wird.
   b. Schreiben Sie alle Möglichkeiten in einer Liste auf.
   c. Schreiben Sie hinter die einzelnen Elemente der Liste aus b) die Anzahl der möglichen Vertauschungen.
      z.B. $\{1, 2, 3\}$ 6
      (da es 6 Vertauschungen (Permutationen) von 3 verschiedenen Dingen gibt)
   d. Zählen Sie die Anzahl der Permutationen in c) zusammen. Welche Zahl haben Sie nun bestimmt? Prüfen Sie kritisch und äußern Sie sich sinnvoll.

4. Eine Stadt hat folgendes Straßenbild: Vom Taxistand unten links soll ein Taxi auf einem kurzem Weg über eine der drei Brücken zum Hotel oben rechts fahren. Wie viele Wege können dafür gewählt werden? Weisen Sie darauf hin, wenn Sie das Multiplikationsprinzip oder das Additionsprinzip explizit verwenden.



5. Drei Paare fahren in Urlaub und wollen auf jedem Erinnerungsfoto (alle 6 Personen stehen nebeneinander) in einer anderen Anordnung abgebildet sein.
   a. Wie viele verschiedene Fotos sind möglich, wenn die Frauen immer nebeneinander stehen wollen und die Männer auch.
   b. Wenn die Paare immer nebeneinander stehen wollen?

   In beiden Fällen sind zwei Fotos dann verschieden, wenn wenigstens eine Person an einem anderen der 6 Plätze steht.

6. Beim Skatspiel wird mit 32 verschiedenen Karten gespielt. Jeder der 3 Spieler bekommt 10 Karten, 2 Karten kommen in den „Skat“. Bei der Frage nach der Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten der Karten erhalten Sie zwei Lösungen:
   i) $\binom{32}{10}\cdot\binom{22}{10}\cdot\binom{12}{10}$ ii) $\binom{32}{2}\cdot\binom{30}{10}\cdot\binom{20}{10}$
   a. Welche Problemlösegedanken stecken hinter i) bzw. ii)?
   b. Zeigen Sie, dass sich beide Berechnungen umformen lassen in $\frac{32!}{10!\cdot 10!\cdot 10!\cdot 2!}$.
   c. Den Bruch in b. kann man ebenfalls als kombinatorischen Lösungsweg interpretieren. Tun Sie das.