Wintersemester 2004/05
Reimund Albers

# 8. Übung
# ggT, kgV, Euklidischer Algorithmus

## Präsenzübungen

1. Untersuchen Sie das nachfolgende Zahlenschema

```
0        7        14        21  ...
   3        10        17  ....
      6        13        20  ...
         9        16        23   ...
          .....................
```

   a. Beschreiben Sie mit Worten, wie das Zahlenschema gebildet und fortgesetzt wird.
   b. Die **Zeilen** des Schemas sind klar ersichtlich. Die oberste Zeile erhält die Nummer 0, darunter ist die 1. Zeile, u.s.w. Die 3. Zeile beginnt also mit 9. Geben Sie eine Formel (einen Term) für die Zahlen in der 2. Zeile an. Verwenden Sie auch eine Schreibweise mit „Modulo“
   c. Die **Spalten** sind die nach rechts unten verlaufenden Zahlenlinien. Auch hier soll die Nummerierung mit 0 beginnen. Die 2. Spalte beginnt also mit 14. Geben Sie eine Formel für die Zahlen in der 1. Spalte an.
   d. Geben Sie eine Formel für die Zahl an, die in Zeile z und Spalte s steht. Machen Sie die Probe für die 23 in Zeile 3 und Spalte 2 und für die 21 in Spalte 3 und Zeile 0.
   e. Setzt man das Schema nach links und nach oben fort, kommt man zu negativen Zeilen- und Spaltennummern. Geben Sie zwei Positionen an, an denen 1 steht.
   f. Begründen Sie, warum jede ganze Zahl in dem nach links und oben erweiterten Schema <u>unendlich</u> oft vorkommt.

2. Begründen/Widerlegen Sie:
   Für alle natürlichen Zahlen a,b gilt:
   a. ggT(a,b) = 1        a prim und b prim
   b. ggT(a,b) = 1        a prim oder b prim
   c. a prim und b prim        ggT(a,b) = 1
   d. a prim oder b prim        ggT(a,b) = 1

Hausübungen (Abgabe: Do, 16.12.04)

3. Schreiben Sie für 2!, 3!, 4!, ... , 10! die Ergebnisse und die PFZ auf.
    a. Welche Ergebnisse haben genau eine Null am Ende?
    b. Für welche Fakultät ergibt sich zum ersten Mal zwei Nullen? Warum?
    c. Wie viele Nullen hat 99! am Ende?

4. Nennen Sie die drei behandelten Verfahren zur Bestimmung des ggT zweier Zahlen.
   Nennen Sie für jedes Verfahren den (einen, gewichtigsten) Vorteil und Nachteil.
   Testen Sie es praktisch an den beiden Aufgaben:
   ggT(267457, 274991) und ggT(230400, 294912).

5. Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}$. Geben Sie zwei Lösungen an.
    a. $3x + 7y = 1$
    b. $5x + 17y = 1$
    c. Warum ist $4x + 6y = 33$ in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar?

6. Erforschen Sie $n^3 \quad n, n \quad \mathbb{N} \setminus \{1\}$
    a. Setzen Sie n = 2, 3, 4, ...10 ein, berechnen Sie das Ergebnis und dessen PFZ.
    b. Was ist für alle 9 Ergebnisse der (gemeinsame) ggT?
    c. $n^3 \quad n, n \quad \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist also immer durch .... teilbar.
       Beweisen Sie das für allgemeines n.