



7. Übung Teilmengen, Teilerdiagramme

Präsenzübungen

1. Am Ende des Aufgabenblattes sind Kreise vorbereitet für das Rechnen mit den Restklassen aus \mathbb{R}_{15} . Wählen Sie eine Restklasse aus \mathbb{R}_{15} als Faktor, multiplizieren Sie jede Restklasse mit diesem Faktor und verbinden Sie in dem Kreis jeweils Startzahl und Ergebniszahl durch einen Strich.
 - a. Das fertige Muster ist symmetrisch. Verwenden Sie diese Eigenschaft als Kontrolle.
 - b. Formulieren Sie diese Symmetrie formal, am besten gleich für den allgemeinen Modul m und einen allgemeinen Faktor \bar{k} .
 - c. Beweisen Sie die Symmetrie dieser Diagramme.
2. Es sei $S = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ die Menge der Quadratzahlen und in dieser die Teilbarkeitsrelation \mid_S definiert, also $a, b \in S \text{ gilt } a \mid_S b \iff \exists q \in S \text{ mit } b = qa$. Eine Zahl $a \in S$ heißt Primzahl, wenn sie nur die unechten Teiler 1 und a hat, ansonsten zusammengesetzt. Untersuchen Sie die Zahlen von 1 bis 25^2 , ob sie Primzahlen oder zusammengesetzte Zahlen sind. Haben die zusammengesetzten Zahlen eine eindeutige Primfaktorzerlegung?

Hausübungen (Abgabe: Do, 9.12.04)

3. Schreiben Sie die das Pascalsche Dreieck bis zur 10. Zeile auf, wobei alle Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt sein sollen.
Tipp: Es kann möglicherweise einfacher sein, das Pascalsche Dreieck ganz neu aufzuschreiben und dabei die Primfaktorzerlegungen geschickt zu addieren.
4. Beweisen Sie: Außer 3, 5, 7 gibt es keine drei aufeinander folgenden ungeraden Zahlen, die alle drei Primzahlen sind.
5. (Primzahllücken) Es sei $i = n!$ die (Ihnen sicher bekannte) Fakultät.
 - a. Begründen Sie, warum die 19 aufeinander folgenden Zahlen $20!+2, 20!+3, \dots, 20!+20$ keine Primzahlen sind.
 - b. Konstruieren Sie eine Zahl d , die deutlich kleiner als $20!$ ist und die durch 2 und 3 und 4 und... und 19 und 20 teilbar ist. ($d+2, d+3, d+4, \dots, d+20$ sind dann sicher keine Primzahlen.)
 - c. Die Frage, ob $d+23$ eine Primzahl ist oder nicht verursacht eine mühsame Teilersuche. Welche Primzahlen müssen dabei als Teiler von $d+23$ getestet werden, welche nicht?
 - d. Suchen Sie in einer Primzahlliste (z.B. der Excelliste, die Sie auf der Internetseite finden) die kleinsten beiden Primzahlen, zwischen denen 19 aufeinander folgende Nichtprimzahlen stehen.

6. (Eine typische Umkehraufgabe)
Sie kennen $\text{kgV}(a,b) = 1764$ und $\text{ggT}(a,b) = 28$.
Welche Zahlenpaare (a,b) kommen in Frage?

