Folgende Punktverteilungsänderung gegenüber den angemerkten Punkten (in Kreisen)

Aufgabe 3: 1 Punkt von a) verschoben nach b) für eine Begründung der Wiederholung

Aufgabe 4c)	Teilbarkeit durch 10:	0,5 Punkte
	Teilbarkeit durch 6, 3, 2 :	1 Punkt
	Teilbarkeit durch 11, 4, 2:	1 Punkt

1. a)

$$(A \text{ und } B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B))$$

A	B	(A und B	=>	A)	<=>	(¬A	=>	(A	=>	¬B))
w	w	w	w	w	w	f	w	w	f	f
w	f	f	w	w	w	f	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w	w	w	f	w	f
f	f	f	w	f	w	w	w	f	w	w
		1.	3.	2.	9.	4.	8.	5.	7.	6.

4

Zwei Aussagen heißen äquivalent, wenn die Äquivalenzverknüpfung beider Aussagen stets wahr ist. Das wird in 9. überprüft und ist der Fall. 1

b) A umdrehen. Auf der anderen Seite darf keine 5 stehen.

B umdrehen. ″

5 umdrehen. Auf der anderen Seite dürfen alle Buchstaben <u>außer</u> A und B stehen. 3

Σ 8

2. a) Man zerlegt $13^{20} = 13^{4 \cdot 5} = (13^4)^5$ 1

$13^4 = 28561 = 32 \cdot 892 + 17$

$\Rightarrow 13^4 \equiv 17 \mod 32$ 2

$17^5 = 1419857 = 32 \cdot 44370 + 17$

$\Rightarrow (13^4)^5 \equiv 17^5 \equiv 17 \mod 32$

also $x = 17$ 2

b) Vorauss. $a^{36} \equiv 1 \mod 37$

Für a^{73} zerlegt man $a^{73} = a^{36+36+1}$

$= a^{36} \cdot a^{36} \cdot a$ 1

Nach Vorauss. gilt

$a^{36} \cdot a^{36} \cdot a \equiv 1 \cdot 1 \cdot a \mod 37$

also $a^{73} \equiv a \mod 37$ 1

$\Sigma\ 7$

3. a) Man muss alle Primzahlen kleiner als $\sqrt{101}$ testen. Also $t \in \{2,3,5,7\}$. 101 ist durch keine der vier Zahlen teilbar, also eine Primzahl. 1 1

b)

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & \equiv 1 & \mod 101 \\ 10 & \equiv 10 & \mod 101 \\ 100 & \equiv -1 & \mod 101 \\ 1000 & \equiv -10 & \mod 101 \\ 10^4 & \equiv 100^2 \equiv 1 & \mod 101 \end{array}\right\} \text{Wiederholung}$$

2

c)

Ziffern	x	y	3	9	2	5
Gewichte	10	1	−10	−1	10	1

1

Gewichtete QS: $10x + y - 30 - 9 + 20 + 5$

$= 10x + y - 14$ 1

$x = 1 \quad y = 4$ führt auf eine gewichtete QS von 0

$\Rightarrow$ Die Zahl ist durch 101 teilbar 1

Wegen $0 \leq x, y \leq 9$ ist die größte, mögliche gew. QS 85, die kleinste −14.

Also kann es keine weitere Lösung geben 1

Σ 8

4a) (siehe Blatt) $2 \cdot 6 = 6 \cdot 2 = 15$

$3 \cdot 6 = 6 \cdot 3 = 24$

$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 21$

$5 \cdot 5 = 34$ 1

b)

```
 53 · 26
 -------
 136
   444
 -------
 2834
```

```
2556 : 4 = 465
22
--
 35
 33
 --
  26
  26
  --
   0
```

je 1,5 3

c) Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn sie auf 0 endet

Eine Zahl ist durch $\begin{Bmatrix}6\\3\\2\end{Bmatrix}$ teilbar, wenn ihre Quersumme durch $\begin{Bmatrix}6\\3\\2\end{Bmatrix}$ teilbar ist. je 0,5

Eine Zahl ist durch $\begin{Bmatrix}11\\4\\2\end{Bmatrix}$ teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch $\begin{Bmatrix}11\\4\\2\end{Bmatrix}$ teilbar ist. $1\frac{1}{2}$

d) Ansatz: $21abc$

Durch 10 teilbar $\Rightarrow c = 0$ 1

Durch 6, 3, 2 teilbar $\Rightarrow 6 \mid 2+1+a+b$

Das ist z.B. erfüllt für $a+b=3$ 1

Durch 11, 4, 2 teilbar $\Rightarrow 11 \mid 2-1+a-b$

Das ist z.B. erfüllt für $a-b=-1$ 1

Addition beider Gleichungen: $2a = 2 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow b = 2$

Also ist 21120 eine gesuchte Zahl

(es gibt mehr Lösungen) $1\frac{1}{2}$

Σ 10

5. a) In der Liste stehen alle Permutationen der 6 Buchstaben. Das sind $6! = 720$ Wörter (1)

b) 1. C E H L S U
2. C E H L U S
3. C E H S L U
4. C E H S U L
5. C E H U L S
6. C E H U S L (2)

c) Steht auf dem ersten Platz ein C, kann man die übrigen 5 Buchstaben beliebig vertauschen. $5! = 120$

Es gibt 120 Wörter, die mit C anfangen (1)

d) Wie in c). Es sind noch 4 Buchstaben vertauschbar $\Rightarrow$ $4! = 24$ Wörter, die mit LU anfangen (1)

e) Zunächst kommen je 120 Wörter, die mit C, E oder H anfangen. $\Rightarrow$ Das 361. Wort ist das erste mit L. (1)

Nun kommen 4 Gruppen zu je 24 Wörtern, die mit LC, LE, LH oder LS anfangen

$\Rightarrow$ 457. LU.... ist das erste Wort mit LU (1)

Konkret 457. LUCEHS
458. LUCESH
459. LUCHES
460. LUCHSE (1)

Σ 8

6. a) Induktionsanfang: Die Aussage gilt für $n=1$

$2^{n+2}-2^n = 2^3-2^1 = 8-2 = 6 = 3\cdot 2$ stimmt 1

Induktionsschluss:

I-Vorauss.: $3 \mid 2^{n+2}-2^n \Leftrightarrow$ Es gibt ein $k_1 \in \mathbb{Z}$ mit $2^{n+2}-2^n = 3k_1$ 1

I-Behaupt.: $3 \mid 2^{n+3}-2^{n+1} \Leftrightarrow$ Es gibt ein $k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $2^{n+3}-2^{n+1} = 3\cdot k_2$ 1

Beweis

$$2^{n+3}-2^{n+1} = 2\cdot(2^{n+2}\underbrace{-2^n) = 2\cdot 3}_{\text{Ind. Vor.}}k_1 = 3\cdot k_2$$ q.e.d. 2

b) $2^{n+2}-2^n = 2^n(2^2-1) = 2^n\cdot 3$

Folglich ist $2^{n+2}-2^n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ durch 3 teilbar 2

Σ 7