Reimund Albers, Einführung in die Mathematik I, WiSe 04/05

(14.) Übung, Lösungsskizzen

Zu allen Aufgaben schreibe ich nur den Schritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ auf.

1a) $$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)}_{\text{Ind. Vor.}} + [2(n+1)-1]$$
$$= n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1$$
$$= (n+1)^2 \quad \text{q.e.d.}$$

b) $$\sum_{k=1}^{n+1} 2k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2k}_{\text{Ind. Vor.}} + 2(n+1)$$
$$= n(n+1) + 2(n+1) \qquad n+1 \text{ ausklammern}$$
$$= (n+1)(n+2) \quad \text{q.e.d.}$$

c) $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\text{Ind. Vor.}} + (n+1)^2$$
$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \qquad \frac{1}{6}(n+1) \text{auskl.}$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6] \qquad \text{ausmultiplizieren}$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \quad \text{q.e.d.}$$

d) $$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} 2^i}_{\text{Ind. Vor.}} + 2^{n+1}$$
$$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 \quad \text{q.e.d.}$$

e) $$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)}_{\text{Ind. Vor.}} + (n+1)(n+2)$$
$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \qquad \frac{1}{3}(n+1)(n+2) \text{ ausklamm.}$$
$$= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

1f) ganz analog zu e)

g) $$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Ind. Vor.

$$= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{q.e.d.}$$

h) $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{q.e.d.}$$

i) $$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$$

Ind. Vor.

$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2n^2+3n+1}{2n+3}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} \quad \text{q.e.d.}$$

j) $$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} + \frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)}$$

Ind. Vor.

$$= \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$= \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$= \frac{n+1}{3n+4} \quad \text{q.e.d.}$$

k) $$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1}$$

$$= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} = \frac{\cancel{x^{n+1}} - 1 + x^{n+2} - \cancel{x^{n+1}}}{x-1}$$

$$= \frac{x^{n+2}-1}{x-1} \quad \text{q.e.d.}$$

2a. $A(n):\ 3 \mid 13^{n}+2 \iff \exists\, k_1 \in \mathbb{Z}$ mit $13^{n}+2 = 3\cdot k_1$

$A(n+1):\ 3 \mid 13^{n+1}+2 \iff \exists\, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $13^{n+1}+2 = 3\cdot k_2$

$$13^{n+1}+2 = 13\cdot 13^{n}+2 = 13\cdot\left(13^{n}+2\right)-26+2$$

$$= 13\cdot \overset{\text{Ind.Vor.}}{3k_1} - 24 = 3\cdot\left(13k_1-8\right) = 3k_2 \quad \text{q.e.d.}$$

b. $5^{n+1}+7 = 5\cdot\left(5^{n}+7\right)-35+7 = 5\cdot \overset{\text{Ind.Vor.}}{4k_1} - 28 = 4\cdot\left(5k_1-7\right)$

c. $50^{n+1}+6 = 50\left(50^{n}+6\right)-300+6 = 50\cdot \overset{\text{Ind.Vor.}}{7k_1} - 294 = 7\cdot\left(50k_1-42\right)$

d. $2^{3(n+1)}+13 = 2^{3n+3}+13 = 2^{3}\cdot 2^{3n}+13 = 8\cdot\left(2^{3n}+13\right)-104+13$

$$= 8\cdot \overset{\text{Ind.Vor.}}{7k_1} - 91 = 7\left(8k_1-13\right)$$

e. $3^{2(n+1)}-1 = 3^{2n+2}-1 = 3^{2}\cdot 3^{2n}-1 = 9\left(3^{2n}-1\right)+9-1$

$$= 9\cdot \overset{\text{Ind.Vor.}}{8k_1} + 8 = 8\left(9k_1+1\right)$$

f. $7^{n+1}-2^{n+1} = 7\cdot 7^{n}-2\cdot 2^{n} = 7\cdot\left(7^{n}-2^{n}\right)+7\cdot 2^{n}-2\cdot 2^{n}$

$$= 7\cdot \overset{\text{Ind.Vor.}}{5k_1} + 5\cdot 2^{n} = 5\left(7k_1+2^{n}\right)$$

g. $2^{3(n+1)}-5^{n+1} = 2^{3n+3}-5^{n+1} = 8\cdot 2^{3n}-5\cdot 5^{n}$

$$= 8\cdot\left(2^{3n}-5^{n}\right)+8\cdot 5^{n}-5\cdot 5^{n}$$

$$= 8\cdot \overset{\text{Ind. Vor.}}{3k_1} + 3\cdot 5^{n}$$

$$= 3\left(8k_1+5^{n}\right)$$

3) $A(n):\ \exists k_1 \in \mathbb{Z}$ mit $n(n+1)(n+2) = 6 \cdot k_1$

$A(n+1):\ \exists k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $(n+1)(n+2)(n+3) = 6 \cdot k_2$

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)(n+3) &= \underbrace{(n+1)(n+2)\cdot n}_{\downarrow \text{ Ind. Vor.}} + (n+1)(n+2)\cdot 3 \\ &= 6k_1 + 3(n^2+3n+2) \\ &= 6\Big[k_1 + \underbrace{\frac{n(n+3)}{2}}_{\in \mathbb{N}\text{, denn wenn } n \text{ ungerade} \Rightarrow n+3 \text{ gerade}} + 1\Big] \\ &= 6k_2 \quad , k_2 \in \mathbb{Z} \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

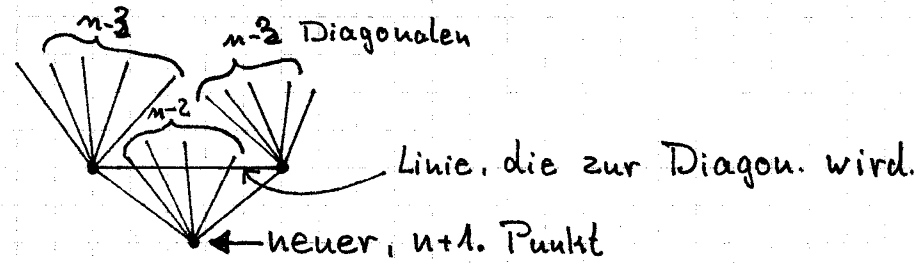
4) Es sei B eine Menge mit $n+1$ Elementen und m ein beliebiges Element von B. Dann hat $A = B \setminus \{m\}$ nur n Elemente. Sei $P(A)$ die Menge aller Teilmengen von A. $|P(A)| = 2^n$. Jede Teilmenge von A ist auch Teilmenge von B und $P(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von B, die m <u>nicht</u> enthalten. Fügt man zu jeder Menge von $P(A)$ m hinzu, erhält man die Menge aller Teilmengen von B, die m <u>enthalten</u>. Das sind ebenfalls 2^n Mengen. Also hat B $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen q.e.d.

5) Von den $n+1$ Dingen sei a eins. Dann sind die $n+1$ Dinge ohne a n Dinge, von denen es (Ind.Vor.) $n!$ Permutationen gibt. Zu jeder Permutation kann man a davor setzen $\rightarrow$ $n!$ Permutat. von $n+1$ Dingen mit a auf dem 1. Platz. Ebenso kann man a auf dem 2. Platz einfügen $\rightarrow$ $n!$ Permutationen von $n+1$ Dingen mit a auf dem 2. Platz. u.s.w. Zuletzt kann man a hinter die Permutationen von n Dingen schreiben $\rightarrow$ $n!$ Permut. von $n+1$ Dingen mit a auf dem $n+1$. Platz. Sind insgesamt $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ Permutationen von $n+1$ Dingen

q. e. d.

6. $A(n): \quad V(n) = D(n) + n$

$A(n+1): \quad V(n+1) = D(n+1) + (n+1)$



Man fügt zu einem n-Eck einen n+1. Punkt hinzu und zieht alle Verbindungslinien zu den anderen n Punkten

$V(n+1) = V(n) + n$

Von dem neuen Punkt gehen n-2 Diagonalen aus. Eine bisher außen liegende Verbindungslinie wird zur Diagonalen. Also $D(n+1) = D(n) + n-2 + 1 = D(n) + n-1$

$\Rightarrow D(n) = D(n+1) - n + 1 \quad (*)$

Also: $V(n+1) = V(n) + n$

$\overset{\text{Ind. Vor.}}{=} D(n) + n + n$

$= D(n+1) - n + 1 + n + n \quad$ wegen $(*)$

$= D(n+1) + n + 1 \qquad$ q.e.d.

7a) siehe „vollständige Induktion Beutelspacher" im Internet

b) $A(n): \quad f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$

$A(n+1): \quad f_{n+2} \cdot f_n - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$

$$f_{n+2} \cdot f_n - f_{n+1}^2 = (f_{n+1} + f_n) \cdot f_n - (f_n + f_{n-1})^2$$

$$= f_{n+1} \cdot f_n \cancel{+ f_n^2} \cancel{- f_n^2} - 2 f_n f_{n-1} - f_{n-1}^2$$

$$= f_{n+1} \cdot f_n - f_n f_{n-1} - f_n f_{n-1} - f_{n-1}^2$$

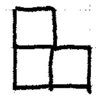
$$= f_n (f_{n+1} - f_{n-1}) - f_{n-1} (f_n + f_{n-1})$$

$$= f_n \cdot f_n - f_{n-1} \cdot f_{n+1}$$

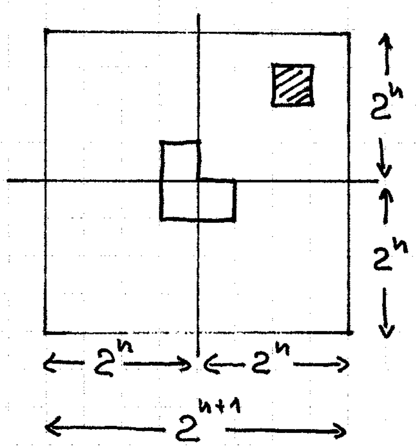
$$= (-1) \cdot (-1)^n \quad \text{nach Ind. Vor.}$$

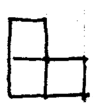
$$= (-1)^{n+1} \qquad \text{q.e.d.}$$

8. siehe „vollständige Induktion Beutelspacher" im Internet

9. $A(n)$: Ein Quadrat der Kantenlänge 2^n, ohne ein einzelnes Einheitsquadrat, lässt sich mit Teilen der Form  auslegen.

Es sei ein Quadrat der Kantenlänge 2^{n+1} gegeben



Das teilt man waagerecht und senkrecht in 2 Teile, so dass vier Quadrate der Kantenlänge 2^n entstehen.
In einem $2^n \times 2^n$ Quadrat ist ein Einheitsquadrat schon bedeckt.
Auf die anderen drei $2^n \times 2^n$ Quadrate legt man im Kreuzungspunkt so einen Dreierstein, dass in jedem $2^n \times 2^n$ Quadrat genau ein Einheitsquadrat bedeckt ist. Nun hat man vier $2^n \times 2^n$ Quadrate, in dem ein Einheitsquadrat fehlt. Diese lassen sich nach Induktionsvorauss. mit Teilen der Form  auslegen.

Damit ist das $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ Quadrat, ohne das eine Einheitsquadrat, ausgelegt q.e.d.