Reimund Albers, Einführung in die Mathematik I, WiSe 04/05

13. Übung, Lösungsskizzen

1a) Mit Zurücklegen gibt es mehr Möglichkeiten als ohne, ebenso ist bei Berücksichtigung der Reihenfolge die Anzahl größer als ohne

b)

Reihenfolge	Zurücklegen mit		Zurücklegen ohne
mit	n^k	$\geq$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
	$\rotatebox{90}{$\geq$}$		$\rotatebox{90}{$\geq$}$
ohne	$\binom{n-1+k}{k}$	$\geq$	$\binom{n}{k}$

Am größten ist danach n^k, am kleinsten $\binom{n}{k}$

Dazwischen liegen $\frac{n!}{(n-k)!}$ und $\binom{n-1+k}{k}$, die sich

c) untereinander schwer vergleichen lassen. Die kombinatorische Überlegung zeigt einmal eine Veränderung, die die Anzahl erhöht (ohne → mit Reihenfolge) aber auch eine, die die Anzahl verringert (mit → ohne Zurücklegen)

Eine Exceltabelle zeigt, dass bis auf Ausnahmen (fett in oberer Tab) $\frac{n!}{(n-k)!}$ größer ist als $\binom{n-1+k}{k}$

---

2. a) $\frac{5^3}{3!} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \notin \mathbb{N}$ Als Anzahl von Kombinationsmöglichkeiten ist das Unsinn

b) $\frac{n^8}{8!} = \frac{n^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = \frac{n^8}{2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}$

Hier sieht man, dass n die Primfaktoren 2, 3, 5 und 7 enthalten muss. Da im Zähler n^8 steht, reicht es, dass die Primfaktoren in der 1. Potenz in n vorkommen zu 1c)

mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge

k \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	**3**	6	10	15	21	28	36	45
3	1	4	**10**	20	35	56	84	120	165
4	1	5	15	**35**	70	126	210	330	495
5	1	6	21	56	**126**	252	462	792	1287
6	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435
8	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870
9	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310
10	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758

$\binom{n-1+k}{k}$

ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge

k \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	####	2	6	12	20	30	42	56	72
3	####	####	6	24	60	120	210	336	504
4	####	####	###	24	120	360	840	1680	3024
5	####	####	###	#####	120	720	2520	6720	15120
6	####	####	###	#####	#####	720	5040	20160	60480
7	####	####	###	#####	#####	#ZAHL!	5040	40320	181440
8	####	####	###	#####	#####	#ZAHL!	#ZAHL!	40320	362880
9	####	####	###	#####	#####	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	362880
10	####	####	###	#####	#####	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!

$\frac{n!}{(n-k)!}$

2b) Forts.

$$n = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210 \quad \Rightarrow \quad \frac{n^8}{8!} = \frac{2^8\cdot 3^8\cdot 5^8\cdot 7^8}{2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7} = 2\cdot 3^5\cdot 5^7\cdot 7^7 \in \mathbb{N}$$

b ii) Jedes Vielfache von 210 ist eine Lösung für

$$\frac{n^8}{8!} \in \mathbb{N}$$

c) Das Teilen durch $k!$ ist der <u>falsche</u> Versuch, alle Fälle, die sich nur durch Vertauschen unterscheiden, zu einem Fall zusammen zu fassen. $k!$ ist aber nur dann die Anzahl der Vertauschungen, wenn die k Dinge verschieden sind. z.B. $(1,2,4)$ hat $3! = 6$ Vertauschungen aber $(1,1,4)$ hat nur $\frac{3!}{2!} = 3$ Vertauschungen. Man darf also nicht alle Möglichkeiten (n^k) einheitlich durch $k!$ teilen. (siehe auch Aufg 3)

d) 1. Schritt: PFZ von $k!$ bestimmen

$$k! = \prod_{i=1}^{m} p_i^{n_i} \quad , \; p_i \text{ prim} \; , \; n_i \in \mathbb{N}_0$$

2. Schritt: Da im Zähler n^k steht, für alle Exponenten n_i berechnen

$$m_i = \left[\frac{n_i}{k}\right] + 1 \quad (1) \qquad [\,]\ \text{Gauß-klammer}$$

„nächst kleinere ganze Zahl"

3. Schritt: n zusammensetzen mit ~~aus~~ PFZ

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{m_i}$$

(1) Anmerkung: Man kann zeigen, dass die m_i immer nur 1 sein können.

Beispiel: $k = 10 \qquad k! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

$$\Rightarrow n = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 210$$

Probe $\dfrac{n^k}{k!} = \dfrac{210^{10}}{10!} = \dfrac{2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 7^{10}}{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7} \in \mathbb{N}$

Hausübungen

3a) $n=5 \quad k=3 \quad$ Ziehen mit Zurücklegen ohne Reihenf.

$$\binom{n-1+k}{k} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 35$$

b)
c)

Ziehung	Vert.				
1 1 1	1	2 2 2	1	3 3 3	1
1 1 2	3	2 2 3	3	3 3 4	3
1 1 3	3	2 2 4	3	3 3 5	3
1 1 4	3	2 2 5	3	3 4 4	3
1 1 5	3	2 3 3	3	3 4 5	6
1 2 2	3	2 3 4	6	3 5 5	3
1 2 3	6	2 3 5	6	6 Fälle	19
1 2 4	6	2 4 4	3		
1 2 5	6	2 4 5	6	4 4 4	1
1 3 3	3	2 5 5	3	4 4 5	3
1 3 4	6	10 Fälle	37	4 5 5	3
1 3 5	6			3 Fälle	7
1 4 4	3				
1 4 5	6			5 5 5	1
1 5 5	3			1 Fall	
15 Fälle	61				

d) Summe der Vertauschungen: $61 + 37 + 19 + 7 + 1 = 125 = 5^3$

In b) wurden alle Möglichkeiten <u>ohne</u> Berücksichtigung d.R. aufgeschrieben. Addiert man alle Vertauschungen

(die <u>nicht</u> einheitlich $k! = 6$ sind, siehe Aufg 2),
so Berücksichtigt man zusätzlich die Reihenfolge.
Diese Anzahl ist $n^k = 5^3 = 125$, was hier tatsächlich herauskommt. Das macht mich stolz und glücklich.

4. Jede Fahrt vom Start zum Hotel führt 9 Karolängen zu einer Brückenauffahrt und nach der Brücke 5 Karolängen zum Hotel. Das ist für die 3 Brücken gleich.

1. Fall Nordbrücke

Anfahrten Start-Brücke $\binom{3+6}{3} = \frac{\cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4} \cdot 7}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 84$

(Ziehen ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge)

Fahrten Brücke-Hotel $\binom{4+1}{1} = 5$

Die Anfahrten können mit den Fahrten Brücke-Hotel kombiniert werden → Multiplikationsregel

$84 \cdot 5 = 420$ Wege über die Nordbrücke

2. Fall Mittelbrücke

Anfahrten Start-Brücke $\binom{4+5}{4} = \frac{9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6}^{2}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} = 126$

Fahrten Brücke-Hotel $\binom{3+2}{2} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{1 \cdot \cancel{2}} = 10$

Kombination (Multiplikations~~pr~~regel) 1260 Wege

3. Fall Südbrücke

Anfahrten Start-Brücke $\binom{5+4}{4} = 126$

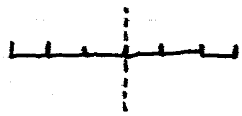
Fahrten Brücke-Hotel $\binom{2+3}{2} = 10$

Kombination (Multiplikationsregel) 1260 Wege

Die Betrachtungen für jede Brücke einzeln ist eine Zerlegung in disjunkte Teilmengen (eine Fahrt über eine Brücke fährt nicht über eine andere) →

Die einzelnen Möglichkeiten müssen nach dem Additionsgesetz addiert werden.

Es gibt insgesamt $420 + 1260 + 1260 = 2940$ Wege vom Start zum Hotel.

5 a)  Wahl der Hälften · Plätze Frauen · Plätze Männer

$= 2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ Fotos

Erläuterung: Die Frauen stehen links oder rechts: 2

3 Frauen auf 3 Plätzen vertauschen: $3!$

3 Männer " " " : $3!$

b) Die 3 Paare können untereinander vertauscht werden: $3!$

Innerhalb eines Paares können Mann u. Frau tauschen: 2 bei jedem Paar $2 \cdot 2 \cdot 2$

Also kombiniert (Multiplikationsregel)

$3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 8 = 48$ Fotos

6. a) i) Von den 32 Karten werden 10 für den ersten Spieler herausgegriffen. Das geschieht ohne Zurücklegen und ohne Berücks. d. Reihenfolge. Also $\binom{32}{10}$. Von den restlichen 22 Karten gehen 10 an den 2. Spieler und von den verbleibenden 12 Karten 10 an den 3. Die letzten beiden Karten werden in den Skat gelegt, das geht auf 1 Art, die 1 ist weggelassen.

ii) 2 von 32 in den Skat

10 von den verbleibenden 30 an Spieler 1

10 von den verbleibenden 20 an Spieler 2

restliche Karten (keine Auswahl) an Spieler 3

b) i) $\binom{32}{10}\cdot\binom{22}{10}\cdot\binom{12}{10} = \frac{32!}{10!\cdot \cancel{22!}}\cdot\frac{\cancel{22!}}{10!\cdot\cancel{12!}}\cdot\frac{\cancel{12!}}{10!\,2!}$

$$= \frac{32!}{10!\cdot 10!\cdot 10!\cdot 2!}$$

ii) $\binom{32}{2}\cdot\binom{30}{10}\cdot\binom{20}{10} = \frac{32!}{2!\,\cancel{30!}}\cdot\frac{\cancel{30!}}{10!\,\cancel{20!}}\cdot\frac{\cancel{20!}}{10!\,10!}$

$$= \frac{32!}{2!\cdot 10!\cdot 10!\cdot 10!}$$

c) Der Term in b) ist die Berechnung ~~von~~ der Permutationen von 32 Dingen, von denen 3 mal 10 Dinge gleich sind und noch 2. z.B. 10 Einsen, 10 Zweien, 10 Dreien und 2 „S". Jede Vertauschung ist eine Verteilung des Blattes.

Karten:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	....
Spieler:	2	1	2	3	2	1	1	3	3	1	1	2	3	....

Bedeutung: Karte 1 geht an Spieler 2, Karte 2 an Spieler 1

Karte 3 an Spieler 2 u.s.w.