Reimund Albers, Einführung i.d. Mathematik I, WiSe 04/05

Übung Nr. 12 Lösungsskizzen

Präsenzübungen

1 a i) Formel: n^k $\quad n = 2$ Farben

$k = 4$ Ziehungen

$\Rightarrow$ Es gibt $2^4 = 16$ versch. Möglichkeiten für das Ziehen

ii) Formel $\binom{n-1+k}{k}$ $\quad n=2$ Farben

$k=4$ Ziehungen

$\binom{2-1+4}{4} = \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ Möglichkeiten

nämlich (wwww) (wwws) (wwss) (wsss) (ssss)

b) Unterscheidet man nur die Farben, so kommt es doch zu Wiederholungen, da die Farben wiederholt vorkommen. $\Rightarrow$ Nicht stur die Formeln anwenden, sondern (erneut) denken

i) Da die Farben mehrfach vorkommen, kann man die Ziehung zunächst wie a i) behandeln.

$\Rightarrow$ 16 Möglichkeiten. Der Fall (ssss) ist nicht möglich $\Rightarrow$ Es gibt 15 Möglichkeiten

ii) Wie oben a ii). Auch hier ist (ssss) nicht möglich $\Rightarrow$ 4 Möglichkeiten

2 a) Schrittweiser Aufbau

1. Gerade: 0 Schnpkte. $\quad$ 2. Gerade: $0+1=1$ SP

3. " : $1+2=3$ SP $\quad$ 4. " : $3+3=6$ SP

Durch jede neue Gerade kommen so viele Schnittpunkte dazu, wie bereits Geraden vorhanden sind. Die k-te Gerade erzeugt $k-1$ neue Schnittpunkte zu den schon vorhandenen.

2a) Fortsetzung

Das Aufsummieren führt zu den Dreieckszahlen

$$0+1+2+\dots+(n-1) = D(n-1) = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

n Geraden haben $\frac{(n-1)\cdot n}{2}$ Schnittpunkte.

b) Auch hier bauen wir die Situation schrittweise auf.

Man zeichnet die k parallelen Geraden $\rightarrow$ 0 Schnittp.

1. nicht dazu parallele Gerade: $+ k$ Schnittpunkte

Jede weitere Gerade erzeugt so viele Schnittpunkte wie Geraden vorhanden sind. Also

$$\underbrace{k + (k+1) + (k+2) + \dots + (n-1)}_{n-k \text{ Geraden}},$$

$$= (n-k)\cdot k + 1 + 2 + \dots + (n-1-k)$$

$$= (n-k)\cdot k + D(n-1-k) = (n-k)k + \tfrac{1}{2}(n-1-k)\cdot(n-k)$$

$$= \tfrac{1}{2}(n-k)(n+k-1)$$

3. Beispiel: $18 = 2\cdot 3^2$

Jeder Teiler von 18 lässt sich als 2-Tupel darstellen. $(\dots,\dots)$

Anzahl des Faktors 2

Anz. " " 3

Auf dem 1. Platz hat man 2 Möglichkeiten, nämlich 0 oder 1

auf dem 2. Platz 3 Möglichk., nämlich 0, 1 oder 2

$\Rightarrow$ $2\cdot 3 = 6$ Tupel $= 6$ Teiler $T_{18} = \{1, 18, 2, 9, 3, 6\}$

allgemein: Die PFZ zu a sei $a = \prod_{i=1}^{m} p_i^{n_i}$, $n_i \in \mathbb{N}_0$

Dann ist jeder Teiler von a durch ein m-Tupel darstellbar. Platz i gibt an, wie oft der Primfaktor p_i gewählt wird. Dafür gibt es $n_i + 1$ Möglichkeit.

Also hat a $\prod_{i=1}^{m}(n_i+1)$ Teiler.

3a) "$\Rightarrow$" Ist die Anzahl der Teiler ungerade

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{m} (n_i + 1)$ ist ungerade $\Rightarrow \forall_{i \in \{1,\dots m\}} : n_i + 1$ unger.

$\Rightarrow \forall_{i \in \{1,\dots m\}} : n_i$ gerade $\Rightarrow \forall_i \exists k_i : n_i = 2k_i$

Dann kann man n schreiben als

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{n_i} = \prod_{i=1}^{m} p_i^{2k_i} = \prod_{i=1}^{m} (p_i^{k_i})^2 = \left(\prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}\right)^2$$

"$\Leftarrow$" Die obige Kette wird praktisch umgekehrt durchlaufen. Wenn n Quadratzahl ist, dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $n = r^2$. Hat r die Primfaktorz. $\prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}_0$ dann gilt $n = \left(\prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}\right)^2 = \prod_{i=1}^{m} p_i^{2k_i}$. Also sind alle Exponenten gerade. Dann ist die Anzahl der Teiler $\prod_{i=1}^{m} (2k_i + 1)$ ein Produkt aus ungeraden Zahlen, also selbst ungerade.

b) Erinnerung: $a \in \mathbb{N}$, $a | n \Rightarrow \exists b \in \mathbb{N} : n = a \cdot b$

$\Rightarrow b | n$ b ist der Komplementärteiler zu a

"$\Rightarrow$" Kontraposition:

n keine Quadratz. $\Rightarrow$ Anz der Teiler von n gerade

n keine Quadratz. $\Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ Jede Zerlegung in Teiler $\cdot$ Komplementärt. liefert 2 verschiedene Teiler für n. $\Rightarrow$ Die Anz. der Teiler ist gerade

"$\Leftarrow$" n ist Quadratzahl $\Rightarrow \sqrt{n} = r \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Die Zerlegung von n in $n = r \cdot r$ liefert nur 1 Teiler. Alle anderen Zerlegungen in Teiler $\cdot$ Komplementärteiler liefern 2 verschiedene Teiler für n $\Rightarrow$ Die Anz. der Teiler von n ist ungerade.

Hausübungen

4a) 8-Tupel mit 2 Möglichkeiten auf jedem Platz
$\Rightarrow 2^8 = 256$ 0-1-Kombinationen

b) Für jede Farbe gibt es 256 Intensitäten
Kombinationen von Rot - Grün - Blau: $256^3 = 16.777.216$
Man kann (technisch) über 16 Mio. Farb~~en~~töne erzeugen.

5 a) Anstoßen von n Personen kann im Urnenmodel dargestellt werden als Ziehen von 2 Kugeln aus n ohne Zurücklegen (man prostet nicht sich selbst zu) und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. $\Rightarrow \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ Mal macht es „kling". $\frac{1}{2}n(n-1) = 49$ hat keine Lösung in den natürlichen Zahlen, denn $n = 10$ ergibt $45 < 49$ und $n = 11$ ergibt $55 > 49$

b) Wenn Bernd zu wenig gezählt hat, ist die kleinste mögliche Zahl von „kling" 55 bei 11 Gästen. Bei noch mehr Gästen ist die Zahl der „kling" natürlich noch größer.

6. Man hat $n = 8$ Buchstaben, davon sind $k_1 = 2$ gleich und $k_2 = 3$ gleich
Nach der allgemeinen Permutationsformel gibt es $\frac{8!}{2!\,3!} = \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}} = 3360$

Dann bräuchte man 336 Sekunden = 5 min 36 s.
(Das erscheint mir etwas wenig)

7. a) Jede Kombination ist ein 4-Tupel
mit 6 Möglichkeiten auf jedem Platz
=> Es gibt $6^4 = 1296$ Kombinationen

b) i) 4 Tupel 1. Platz 6 2. Platz 5 3. Platz 4 4. Platz 3
Möglichkeiten
=> $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{360 \text{ Kombinationen}}$ mit versch. Farben

ii) Steckt man das gleichfarbige Paar auf die ersten beiden Plätze, erhält man

x x · ·
$6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ Kombinationen

Das ist aber nur eine Wahl für die Plätze des gleichfarbigen Paares.

Die anderen Plätze sind 2 aus 4 (Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge) $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$

Diese Platzwahl wird mit der Farbwahl kombiniert

$120 \cdot 6 = \underline{720 \text{ Kombinationen}}$

iii) (wie ii)

Farbwahl: (Drilling auf Platz 1.–3.)

X X X ·
$6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 30$

Platzwahl für den Drilling: $\binom{4}{3} = 4$

Farbwahl kombiniert mit Platzwahl: <u>120 Kombinationen</u>

iv) Wenn alle 4 Stecker die gleiche Farbe haben, gibt es <u>6 Kombinationen</u>, da es 6 Farben gibt

c) Zählt man die Kombinationen in b) zusammen, erhält man: $360 + 720 + 120 + 6 = 1206$. Folglich fehlen 90 Kombinationen.

Das sind die Kombinationen, bei denen 2 Paare auftauchen.

Farbwahl: 2 aus 6 (Ziehen ohne Zurückl., ohne →

Berücksichtigen der Reihenfolge) $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$

Ortswahl für das 1. Paar (das 2. Paar muss dann die verbleibenden Plätze einnehmen)

$$\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$$

Farbwahl kombiniert mit Ortswahl: $15 \cdot 6 = 90$ BINGO!

Anmerkung: Vergleich der Farbwahl in bii) und c)

$\underbrace{\text{1 Drilling 1 Einzel}}$ mit $\underbrace{\text{2 Paare}}$

↳ $6 \cdot 5 = 30$ ↳ $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$

Warum ist die Farbwahl unterschiedlich?

Im ersten Fall kann man die Farbzuordnung unterscheiden: Beispiel (Drilling rot, Einer blau) $\neq$ (Drilling blau, Einer rot). Die Paare sind aber nicht unterscheidbar (1. Paar rot, 2. Paar blau) = (1. Paar blau, 2 Paar rot)

In beiden Fällen hat man 2 rote und 2 blaue Stecker.