Reimund Albers, Einführung i. d. Mathematik I, WiSe 04/05

Übung 10 Lösungsskizzen

1. a) $12345_{18} > DFC9_{18}$

Bei gleicher Basis und verschiedener Anzahl von Ziffern ist die Zahl größer, die mehr Ziffern hat.

b) $121212_7 < 121212_8$

Bei verschiedener Basis und gleichen Ziffern ist die Zahl größer, die ~~zur~~ die größere Basis hat.

c) $\underbrace{BA5_{12} < BA5_{16}}_{\text{nach b)}} \underbrace{<}_{\text{nach a)}} AC84_{16}$

d) (Trick der schnellen Umwandlung von ~~einer~~ einer Basis b_1 in die andere Basis b_2, wenn $b_1^k = b_2$, $k \in \mathbb{N}$. Siehe auch Umwandlung $2 \leftrightarrow 8$ und $2 \leftrightarrow 16$)

729	243	81	27	9	3	1
	1	2	2	1	2	2

81	9	1
5	7	8

$\Rightarrow 122122_3 = 578_9 > 122_9$

2. $401_c = 2300_b \Rightarrow 4c^2 + 1 = 2b^3 + 3b^2$

$$= (2b+3)b^2$$

$4c^2+1$ hat also eine Quadratzahl als Teiler

Da 4 als Ziffer vorkommt, muss $c \geq 5$ sein

c	5	6	7	8	9
$4c^2+1$	101 prim	145 $= 5 \cdot 29$	197 prim	257 prim	325 $= 5^2 \cdot 13$

Danach kann $c = 9$ und $b = 5$ eine Lösung sein.

Probe: $(2b+3) \cdot b^2 = (2 \cdot 5 + 3) \cdot 5^2 = 13 \cdot 5^2$ ✓

Also ist eine Lösung $c = 9$ $b = 5$

Es ist offen, ob es noch weitere Lösungen gibt.

Zusatz Präsenzüb

$b=4$

$12331_4 : 3_4 = 2110_4$ Rest 1

	1	2	3
$\cdot 3_4$	3	12	21

$$
\begin{array}{l}
12 \\
\hline
03 \\
\;\;3 \\
\hline
\;\;03 \\
\;\;\;\;3 \\
\hline
\;\;\;\;01
\end{array}
$$

Probe:

$12331_4 = 445_{10}$

$2110_4 = 148_{10}$ $\quad 148 \cdot 3 = 444$

$12331_4 : \overset{11}{\cancel{5}}_4 = 1121_4$

	1	2	3
$\cdot \cancel{5}_4$ 11	11	22	33

$$
\begin{array}{l}
11 \\
\hline
13 \\
11 \\
\hline
\;\;23 \\
\;\;22 \\
\hline
\;\;\;\;11 \\
\;\;\;\;11 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

Probe:

$12331_4 = 445_{10}$

$1121_4 = 89_{10}$ $\quad 89 \cdot 5 = 445$

$b=5$

$12331_5 : 4 = 1431_5$ Rest 2

	1	2	3	4
$\cdot 4_5$	4	13	22	31

$$
\begin{array}{l}
\;4 \\
\hline
33 \\
31 \\
\hline
\;\;23 \\
\;\;22 \\
\hline
\;\;\;\;11 \\
\;\;\;\;\;\;4 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;2
\end{array}
$$

Probe:

$12331_5 = 966_{10}$

$1431_5 = 241_{10}$ $\quad 241 \cdot 4 = 964$

3 a) $b = 10$

Gewählt $1, 5, 8$

$$\begin{array}{r} 851 \\ -158 \\ \hline 693 \end{array} \quad \begin{array}{r} 963 \\ -369 \\ \hline 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 954 \\ -459 \\ \hline 495 \end{array}$$

Die Ziffern $4, 5, 9$ reproduzieren sich selbst

b) $b = 7$

Gewählt $2, 3, 6$

$$\begin{array}{r} 632 \\ -236 \\ \hline 363_7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 633 \\ -336 \\ \hline 264_7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 642 \\ -246 \\ \hline 363_7 \end{array}$$

Der Prozess endet in einem Zweierzyklus $2,4,6 \Leftrightarrow 3,3,6$

$b = 8$

Gewählt $2, 4, 7$

$$\begin{array}{r} 742 \\ -247 \\ \hline 473_8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 743 \\ -347 \\ \hline 374_8 \end{array}$$

$3, 4, 7$ repoduziert sich selbst

c) Vermutungen

- Ist b gerade, so erhält man 3 Ziffern, die sich selbst reproduzieren. Ist b ungerade, so erhält man 2 Mengen von 3 Ziffern, die sich gegenseitig erzeugen.
- In der Differenz ist die mittlere Ziffer immer $b-1$
- In der Differenz ist die Summe der äußeren beiden Ziffern $b-1$
- Für gerades b sind die drei Ziffern des Endzustandes $\frac{b}{2}-1, \frac{b}{2}, b-1$
- Für ungerades b sind die beiden Ziffernmengen $\left\{ \frac{b-1}{2}, \frac{b-1}{2}, b-1 \right\}$ und $\left\{ \frac{b-3}{2}, \frac{b+1}{2}, b-1 \right\}$

d) $b = 9$

Gewählt $2, 7, 8$

$$\begin{array}{r} 872 \\ -278 \\ \hline 583_9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 853 \\ -358 \\ \hline 484_9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 844 \\ -448 \\ \hline 385_9 \end{array}$$

3d Fortsetzung

$b = 11$

Gewählt $3, 5, 9$

$$\begin{array}{r} 953 \\ -\underline{359} \\ 5A5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A55 \\ -\underline{55A} \\ 4A6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A64 \\ -\underline{46A} \\ 5A5 \end{array}$$

Die Vermutungen werden durch die beiden Beispiele bestätigt.

4. a) Eine Zahl ist durch $b-1$ teilbar, wenn ihre Quersumme durch $b-1$ teilbar ist.

Die Quersumme von 12331_b ist 10. 10 ist durch $1, 2, 5, 10$ teilbar. Also kann (zunächst) $b-1$ gleich $1, 2, 5$ oder 10 sein.

$b-1 = 1 \Rightarrow b = 2$ Die Zahl 12331_2 ist unsinnig, denn die Ziffern 2 und 3 sind im Zweiersystem nicht zugelassen.

$b-1 = 2 \Rightarrow b = 3$ (Dann ist $12331_3 = 172$ Das ist durch 2 teilbar.) Die Ziffer 3 ist aber im 3er-System nicht zugelassen

$b-1 = 5 \Rightarrow b = 6$ $12331_6 = 1855$ also durch 5 teilb.

$b-1 = 10 \Rightarrow b = 11$ $12331_{11} = 17700$ also durch 10 teilb.

b) Die Zahl 12331_b ist für keine Basis b durch b teilbar, denn dazu müsste sie auf 0 enden. (Einerziffer gleich 0)

c) Eine Zahl ist durch $b+1$ teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch $b+1$ teilbar ist.

12331_b hat die alternierende Quersumme $1-2+3-3+1=0$

0 ist durch jede Zahl $b+1$ teilbar.

$\Rightarrow 12331_b$ ist für jede Basis durch $b+1$ teilbar

4c Fortsetzung

Beispiele: $b = 6$ $\quad 12331_6 = 1855_{10} = 7 \cdot 265$

$b = 10$ $\quad 12331_{10} = 11 \cdot 1121$

$b = 9$ $\quad 12331_9 = 8290_{10} = 10 \cdot 829$

Allgemeiner Beweis:

$12331_b = b^4 + 2b^3 + 3b^2 + 3b + 1$. Teilt man dieses Polynom durch $b+1$ ergibt sich. (Polynomdivision)

$(b^4 + 2b^3 + 3b^2 + 3b + 1) : (b+1) = b^3 + b^2 + 2b + 1$

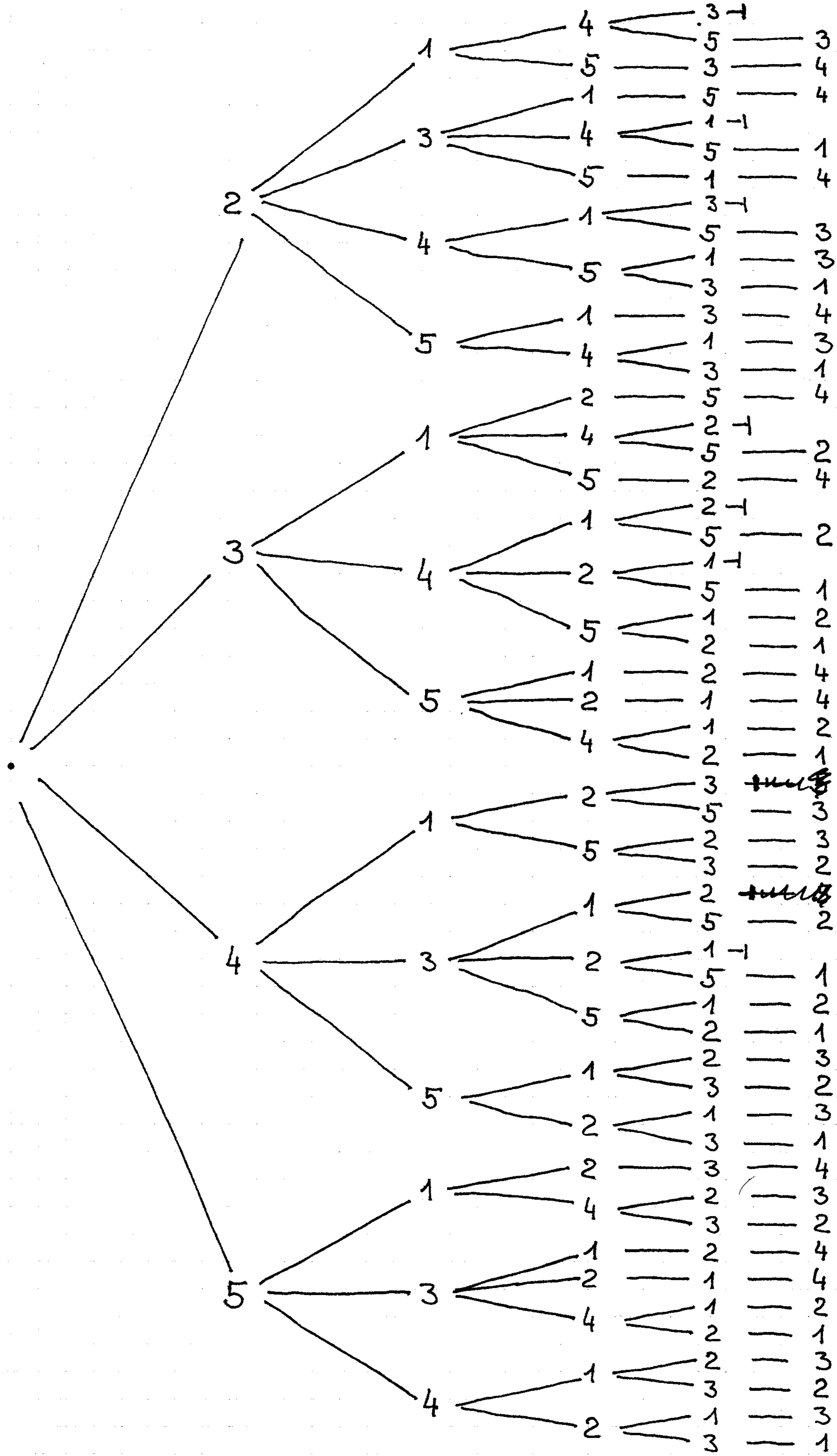
d.h. die Division geht für alle $b \in \mathbb{N}$ auf.

5 a) Für den 1. Brief kann man einen der 5 Umschl. nehmen,
für den 2. " einen der übrigen 4 "
" " 3. " " " " 3 "
" " 4. " " " " 2 "
" " letzten Brief den letzten Umschlag.

$\Rightarrow$ $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ versch. Möglichkeiten, die Briefe auf die Umschläge zu verteilen

b) Da es zu jedem Brief genau einen richtigen Umschlag gibt, hat man bei jedem Brief keine Wahl, also 1 Möglichkeit. Man kann nur auf eine Art alles richtig zuordnen.

5c)



Brief Nr. 1 2 3 4 5
Kommt in Umschlag Nr (Baumdiagramm)