Reimund Albers, Einführung i. d. Mathematik I, WiSe 04/05

Übung 8, Lösungsskizzen

1. a) Nach rechts werden immer 7 addiert $\xrightarrow{+7}$, nach rechts unten immer 3 $\searrow +3$.

b) 2. Zeile $6, 13, 20, 27, \dots$

$6 + 7 \cdot s \quad , \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots$

oder $7s - 1 \quad , \quad s = 1, 2, 3, \dots$ oder $a \equiv 6 \mod 7$ und $a > 0$

c) 1. Spalte: $7, 10, 13, 16, \dots$

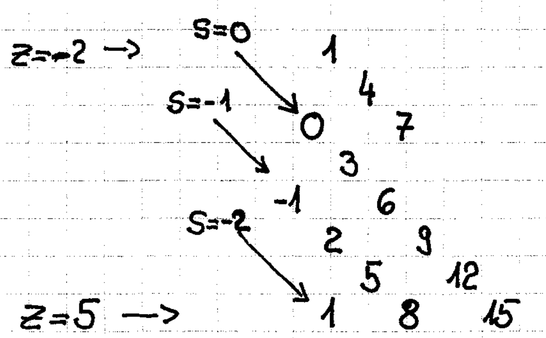
$7 + 3 \cdot z \quad , \quad z = 0, 1, 2, 3, \dots$ oder $3z + 1 \quad , \quad z = 2, 3, 4, \dots$

oder $a \equiv 1 \mod 3$ und $a \geq 7$

d) $n = 3 \cdot z + 7 \cdot s \quad , \quad z, s \in \mathbb{N}_0$

Beispiel $z = 3 \quad s = 2 \quad \Rightarrow 3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 23$

$z = 0 \quad s = 3 \quad \Rightarrow 3 \cdot 0 + 7 \cdot 3 = 21$

e) 

Aus dem Muster kann man direkt ablesen

$z = -2 \quad s = 1$, also

$3 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 = -6 + 7 = 1$

und

$z = 5$ und $s = -2$, also $3 \cdot 5 + 7 \cdot (-2) = 15 - 14 = 1$

f) i) Jede Zahl kommt vor, denn aus

$3(-2) + 7 \cdot 1 = 1$ folgt (Multiplikation mit $n \in \mathbb{N}$)

$3 \cdot (-2n) + 7 \cdot n = n$. Die Zahl n findet man also in der Spalte n und der Zeile $-2n$

ii) Jede Zahl kommt unendlich oft vor

Wegen $3 \cdot 7 + 7 \cdot (-3) = 0$ kann man diese Gleichung beliebig oft zu $3 \cdot (-2n) + 7n = n$ addieren. Man erhält dann eine neue Position im Zahlenschema (7 Zeilen nach unten und 3 Spalten nach links), an der die gleiche Zahl steht.

2. a) Stimmt nicht Gegenbeispiel $a = 9$ $b = 4$

b) Stimmt nicht " "

c) Stimmt, wenn $a \neq b$

a prim $\Rightarrow T(a) = \{1, a\}$

b prim $\Rightarrow T(b) = \{1, b\}$

$T(a) \cap T(b) = \{1\}$ wenn $a \neq b$

d) Stimmt nicht Gegenbeispiel $a = 3$ $b = 6$

$ggT(3, 6) = 3$

HAUSÜBUNG

3. $2! = 2$ $3! = 2 \cdot 3 = 6$ $4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2^3 \cdot 3 = 24$

$5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

$7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$ $8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 40320$

$9! = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 362880$ $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3628800$

a) Genau eine Null am Ende haben die Fakultäten $5!, 6!, 7!, 8!$ und $9!$

b) Zum ersten Mal tauchen bei $10!$ zwei Nullen auf.

$9!$ eine Null $\xrightarrow{\cdot 10}$ zwei Nullen am Ende.

c) Es kommt auf die Faktorenpaare $2 \cdot 5$ an. Da in der PFZ immer genug Zweien vorkommen, ist die Anzahl der 5 in der PFZ maßgeblich.

Mit jeder Zahl n, $n \equiv 0 \mod 5$ kommt (mindestens) eine 5 in der PFZ dazu. ~~Für~~ Das sind bei $99!$ die Zahlen $5, 10, 15, \ldots, 95$. Diese steuern 5^{19} zur PFZ bei. Zusätzlich kommt für jedes n mit $n \equiv 0 \mod 25$ eine zweite 5 in der PFZ hinzu. Das sind $25, 50, 75$. Folglich taucht $5^{19} \cdot 5^3 = 5^{22}$ in der PFZ von $99!$ auf. Da die 2 mehr als 22 Mal vorkommt, ist 10^{22} ein Teiler von $99!$.

Also: $99!$ hat 22 Nullen am Ende

4. 1. Die Teilermengen bilden, vergleichen, ggT heraussuchen.

Vorteil: Sehr anschaulich, macht unmittelbar klar, was der ggT ist

Nachteil: Bei Zahlen größer als 100 kann die Komplette Teilermenge ziemlich groß sein.

2. Zu beiden Zahlen die PFZ bilden und über die kleinsten Exponenten den ggT zusammenstellen.

Vorteil: Geht auch noch für große Zahlen, wenn die Teiler 2, 3, 5 in hoher Potenz vorkommen.

Nachteil: Ist schwierig, wenn Primfaktoren über 11 häufig vorkommen oder nur große Primfaktoren. Dann nütz ein einfacher Rechner auch nicht weiter.

3. Euklidischer Algorithmus

Vorteil: Lässt sich auch für sehr große Zahlen (mit einfachem Rechner) durchführen. Führt mit erträglichem Aufwand immer zum Ziel.

Nachteil: Verfahren ist schwer zu durchschauen.

ggT (267457, 274991) Suche nach Primfaktoren bis 23 ohne Erfolg → Euklidischer Algorithmus

$274991 = 267457 \cdot 1 + 7534$

$267457 = 7534 \cdot 35 + 3767$

$7534 = 3767 \cdot 2 + 0$

also: ggT (267457, 274991) = 3767

$267457 = 3767 \cdot 71$

$274991 = 3767 \cdot 73$

4 Forts. $ggT(230400, 294912)$

$294912 = 2^{15} \cdot 3^2$

$230400 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$ggT(\ldots,\ldots) = 2^{10} \cdot 3^2 = 9216$

$294912 = 9216 \cdot 32$

$230400 = 9216 \cdot 25$

5. a) Durch „scharfes Hinschauen" sieht man

$3(-2) + 7 \cdot 1 = 1$ also $x = -2$ $y = 1$

Wegen $3 \cdot 7 - 7 \cdot 3 = 0$ ergibt die Addition beider Gleichungen: $3 \cdot 5 + 7 \cdot (-2) = 15 - 14 = 1$

Also ist $x = 5$ $y = -2$ eine zweite Lösung

b) $5x + 17y = 1$ $x = 7$ $y = -2$ ist eine Lösung

$5 \cdot (-17) + 17 \cdot 5 = 0$ Addition: $5 \cdot (-10) + 17 \cdot 3 = -50 + 51 = 1$

also $x = -10$ $y = 3$ ist 2. Lösung

Anmerkung: In a) und b) gibt es insgesamt unendlich viele Lösungen

c) 4 und 6 sind durch 2 teilbar, also $4x + 6y = 2(2x + 3y)$. Damit ist die linke Seite für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gerade. 33 auf der rechten Seite ist aber ungerade. Also kann es keine Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$ geben.

6 a) $n = 2: \; 8 - 2 = 6 = 2 \cdot 3$ $n = 3: \; 27 - 3 = 24 = 2^3 \cdot 3$

$n = 4: \; 64 - 4 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $n = 5: \; 125 - 5 = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$n = 6: \; 216 - 6 = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ $n = 7: \; 343 - 7 = 336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$

$n = 8: \; 512 - 8 = 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ $n = 9: \; 729 - 9 = 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

$n = 10: \; 1000 - 10 = 990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

b) Der ggT von allen 9 Zahlen ist 6

c) Satz: $6 \mid n^3 - n \quad , n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Beweis: (Standardweg)

Teilbarkeit durch 2: $n \equiv 0 \mod 2 \Rightarrow n^3 - n \equiv 0 \mod 2$

$n \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow n^3 - n \equiv 1 - 1 = 0 \mod 2$

Also: $n^3 - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 2 teilbar

Teilbarkeit durch 3:

$n \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow n^3 - n \equiv 0 \mod 3$

$n \equiv 1 \mod 3 \Rightarrow n^3 - n \equiv 1 - 1 = 0 \mod 3$

$n \equiv 2 \mod 3 \Rightarrow n^3 - n \equiv 8 - 2 = 6 \equiv 0 \mod 3$

Also ist $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar.

Folglich auch durch 6 teilbar.

Beweis (pfiffig): $n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = (n-1)\,n\,(n+1)$

$n^3 - n$ ist also das Produkt von drei aufeinander folgenden Zahlen. Folglich ist ~~es~~ (mindestens) eine durch 2 und ~~ei~~ eine durch 3 teilbar.

Also ist auch das Produkt durch $2 \cdot 3 = 6$ teilbar.