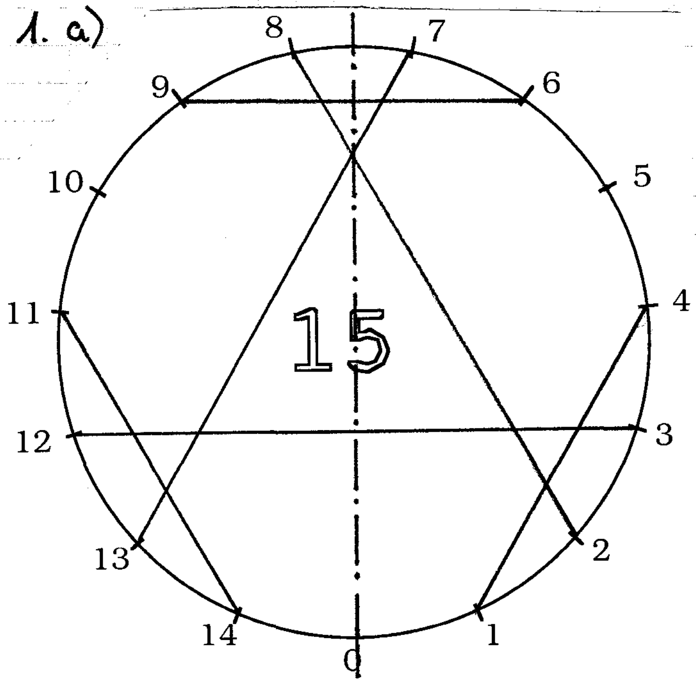
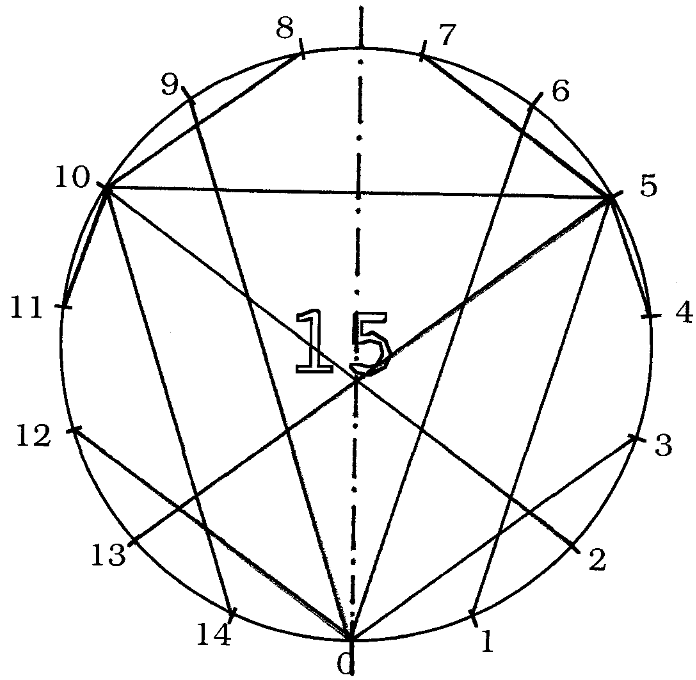
Reimund Albers, Einführung in die Mathematik I, WiSe 04/05

Übung 7, Lösungsskizzen

1. a)



$\cdot 4$



$\cdot 5$

Die Muster sind achsensymmetrisch bezüglich des Durchmessers, der durch 0 geht. — · — · —

b) Konkret bei 15: $\overline{1}$ liegt symm. zu $\overline{14}$, $\overline{2}$ zu 13, ...

allgemein für den Modul m gilt:

$\overline{1}$ liegt symm. zu $\overline{m-1}$, $\overline{2}$ zu $\overline{m-2}$, $\overline{k}$ zu $\overline{m-k}$

Ist der Faktor $\overline{f}$, so wird $\overline{k}$ mit $\overline{f}\cdot\overline{k} = \overline{f\cdot k}$ verbunden. Die dazu symmetrischen Punkte sind $\overline{m-k}$ und $\overline{m-f\cdot k}$.

Multipliziert man $\overline{m-k}$ mit $\overline{f}$ erhält man $\overline{f}\cdot\overline{m-k}$.

Zu zeigen bleibt: $\overline{f}\cdot\overline{m-k} = \overline{m-f\cdot k}$

c) Beispiel: $m = 15 \quad \overline{f} = \overline{4}$ (oben links)

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\text{Symm}} & 14 \\ \downarrow \cdot 4 & & \downarrow \cdot 4 \\ 4 & \xrightarrow{\text{Symm.}} & 56 \equiv 11 \bmod 15 \end{array}$$

Hier ist also:

$\overline{f}\cdot\overline{m-k} = \overline{4}\cdot\overline{14} = \overline{56} = \overline{11}$

$\overline{m-f\cdot k} = \overline{15-4\cdot 1} = \overline{11}$

gleich

1c) Forts.:

allgemein: $\overline{f}\cdot\overline{m-k} = \overline{f\cdot(m-k)} = \overline{f\cdot m - f\cdot k}$

da $m \equiv 0 \mod m \Rightarrow f m \equiv 0 \mod m$

$\Rightarrow f m \equiv m \mod m$

also $\overline{f m} = \overline{m}$, also $\overline{f\cdot m - f\cdot k} = \overline{m - f\cdot k}$ q.e.d.

2. 1^2 (prim nach Def.)

$2^2 = 4$ prim $\quad 3^2 = 9$ prim $\quad 4^2 = 16 = 2^2\cdot 2^2$

$5^2 = 25$ prim $\quad 6^2 = 36 = 2^2\cdot 3^2 \quad 7^2 = 49$ prim

$8^2 = 64 = 2^2\cdot 2^2\cdot 2^2 \quad 9^2 = 81 = 3^2\cdot 3^2 \quad 10^2 = 100 = 2^2\cdot 5^2$

allgemein: Wegen $(a\cdot b)^2 = a^2\cdot b^2$ ist das Quadrat einer zusammengesetzten Zahl ein Produkt von Quadratzahlen.

Also: p prim in $\mathbb{N}$ mit normaler Teilereigenschaft
$\Leftrightarrow p^2$ prim in S mit Teilereig. $|_S$

HAUSÜBUNGEN

3.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 2·2 2·3 2·2 1

1 5 2·5 2·5 5 1

1 2·3 3·5 2·2·5 3·5 2·3 1

1 7 3·7 5·7 5·7 3·7 7 1

1 2·2·2 2·2·7 2·2·2·7 2·5·7 2·2·2·7 2·2·7 2·2·2 1

1 3·3 2·2·3·3 2·2·3·7 2·3·3·7 2·3·3·7 2·2·3·7 2·2·3·3 3·3 1

1 2·5 3·3·5 2·2·3·2·5 2·3·7·5 2·2·3·3·7 2·3·7·5 2·2·3·2·5 3·3·5 2·5 1

4. Da eine Zahl, die auf 5 endet, keine Primzahl sein kann, gibt es für die drei aufeinander folgenden unger. Zahlen folgende Möglichkeiten $x7$, $x9$, $(x+1)1$ oder $x9$, $(x+1)1$, $(x+1)3$. Beispiele: 37, 39, 41 $\quad$ 99, 101, 103

Diese und andere Beispiele legen nahe, dass immer eine der drei Zahlen durch 3 teilbar ist. →

4 Forts.

Beweis: Seien n, $n+2$, $n+4$ drei aufeinander folgende ungerade Zahlen. Wir betrachten diese drei Zahlen modulo 3

Fall 1: $n \equiv 0 \mod 3$. Dann ist n keine Primzahl.

Fall 2: $n \equiv 1 \mod 3$

$\Rightarrow n+2 \equiv 0 \mod 3$ Also ist $n+2$ keine Primzahl

Fall 3: $n \equiv 2 \mod 3$

$\Rightarrow n+4 \equiv 0 \mod 3$ Also ist $n+4$ keine Primzahl

In jedem der drei Fälle ist eine der drei Zahlen durch 3 teilbar, also keine Primzahl.

Also ist 3, 5, 7 der einzige Fall für Primzahldrillinge.

5 a) $20!$ ist durch $2, 3, 4, \ldots, 20$ teilbar

Also ist $20!+2$ durch 2 teilbar, allgemein

$20!+k$ ist durch k teilbar, $k = 2, 3, 4, \ldots, 20$

nach der Teilbarkeitsregel: $a|b$ und $a|c \Rightarrow a|b+c$

b) d wird so konstruiert, dass von den Zahlen $2, 3, 4 \ldots 20$ nacheinander immer nur die Primfaktoren aufgenommen werden, die noch fehlen.

$d = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 19 = 232.792.560$

2, 3, 4, 5, 6, 7 u.s.w

z.B. Wird für die Teilbarkeit durch 8 nur ~~eine~~ 2 als Faktor aufgenommen, da das anfängliche Teilprodukt $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$ bereits durch 4 teilbar ist.

c) Die Primzahlen von 2 bis 23 müssen nicht geprüft werden wegen $a|b$ und $a \nmid c \Rightarrow a \nmid b+c$

Die Primzahlen von 29 bis $\sqrt{232.792.583} \approx 15\,258$ müssen getestet werden, denn die Primteilersuche muss immer bis zur Wurzel der zu untersuchenden Zahl gehen (Vorlesung)

d) Laut Primzahlliste ist zwischen 887 und 907 eine Lücke von 19 zusammengesetzten Zahlen und das sind die beiden kleinsten Primzahlen mit dieser Eigenschaft.

6. Die PFZ der beiden Zahlen sind

$$28 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1$$

$$1764 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^2$$

Diese Primzahlpotenzen kann man nun auf die beiden Zahlen a und b verteilen

Primteiler	3		7		also ergibt sich für	
Exponent	2	0	1	2	a	b
geht in die Zahl	a	b	a	b	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 252$	$2^2 \cdot 3^0 \cdot 7^2 = 196$
	a	b	b	a	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 1764$	$2^2 \cdot 3^0 \cdot 7^1 = 28$
	b	a	a	b	$2^2 \cdot 3^0 \cdot 7^1 = 28$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 1764$
	b	a	b	a	$2^2 \cdot 3^0 \cdot 7^2 = 196$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 252$

Abgesehen von Vertauschungen gibt es nur die beiden Lösungspaare (28, 1764) und (196, 252)