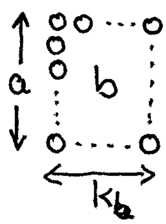
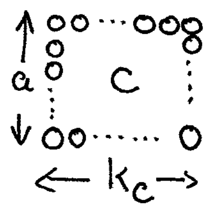
Reimund Albers, Einführung in die Mathematik I, WiSe 04/05

Übung 6

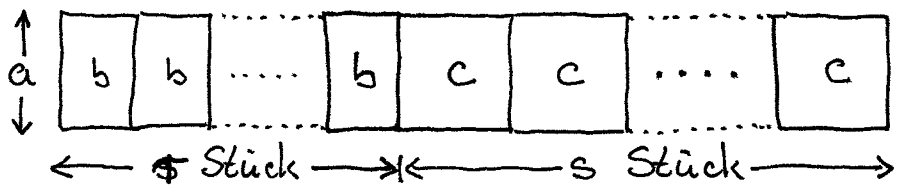
1. $a|b$



$a|c$



Beide Zahlen b, c lassen sich als ein Rechteck darstellen mit der Höhe a und den Breiten k_b bzw. k_c. Die Linearkombination $rb + sc$ sind dann r Rechtecke der „Sorte" b und s Rechtecke der „Sorte" c



Es entsteht dann immer ein Rechteck der Höhe a, egal wie viele Rechtecke von b und Rechtecke von c aneinander gelegt werden.

2. $$\frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{k=1}^{m} k} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m} = \frac{n!}{m!}$$

b) Nun kann man kürzen, so dass alle Zahlen im Nenner verschwinden

$= (m+1) \cdot (m+2) \cdot \ldots \cdot n$

a) Dieses Ergebnis wird mit dem Produktzeichen richtig aufgeschrieben in B, D und E.

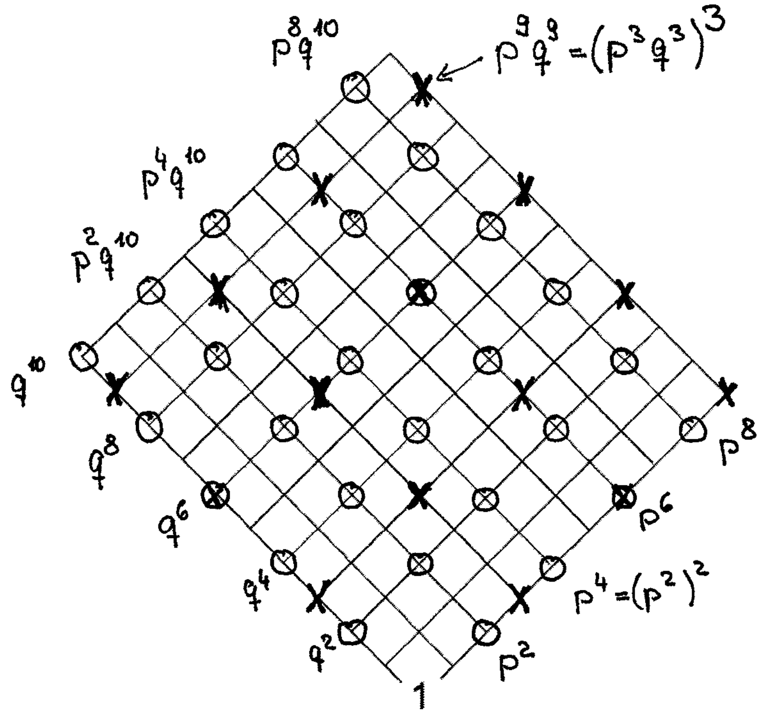
[Zum Lernen: Warum sind die anderen falsch?

A) $\prod_{i=k+1}^{n} i = (k+1)(k+2)(k+3) \cdot \ldots \cdot n$ Aber was ist k?

C) $\prod_{a=m+1}^{n} m = m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m$ Denn hinter dem Π steht nicht a

F) $\prod_{k=i+1}^{n} i = i \cdot i \cdot i \cdot \ldots \cdot i$ Aber was ist i?]

3.



Figur 1

Hausübungen

4.a) Kontraposition: „Wenn es nicht Müh oder Arbeit war, dann war es (das Leben) nicht köstlich"

b) Als echte Implikation verspricht es Menschen, die viel Arbeiten, nichts. Nach diesem Spruch ist Arbeit keine Garantie für ein „köstliches" Leben, oder logischer ausgedrückt: Arbeit ist nicht hinreichend für ein „köstliches" Leben. Aber Arbeit ist notwendig für ein „köstliches" Leben!

5a) $n + Q(n) = 2004$

n darf nicht 5-stellig oder höher sein da dann

$n \geq 10000 \Rightarrow n + Q(n) > 10000$

Angenommen n wäre 3 stellig. Dann wäre das Maximum von $n + Q(n)$ für $n = 999$ erreicht

$\Rightarrow \quad n + Q(n) = 999 + 27 = 1026 < 2004$

<u>Also muss n 4-stellig sein.</u>

5 Forts.

Ansatz für n: $n = 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0$

$$
\begin{aligned}
Q(n) &= a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \\
\hline
n + Q(n) &= 1001a_3 + 101a_2 + 11a_1 + 2a_0
\end{aligned}
$$

Die Tausenderziffer a_3 kann nur 2 oder 1 sein

Fall 1: $a_3 = 2$

$$n + Q(n) = 2002 + 101a_2 + 11a_1 + 2a_0 = 2004 \quad | -2002$$

$$101a_2 + 11a_1 + 2a_0 = 2$$

Wegen $a_2, a_1, a_0 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ist

$a_2 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_0 = 1$ die einzige Lösung dieser Gleichung. <u>1. Lösung $n = 2001 \quad Q(n) = 3$</u>

Fall 2: $a_3 = 1$

$$n + Q(n) = 1001 + 101a_2 + 11a_1 + 2a_0 = 2004$$

$$101a_2 + 11a_1 + 2a_0 = 1003$$

Wäre $a_2 \leq 8$, $\Rightarrow 101a_2 \leq 808$

mit $a_1 \leq 9$ und $a_0 \leq 9$ folgt

$$101a_2 + 11a_1 + 2a_0 \leq 808 + 99 + 18 = 925$$

<u>Also muß $a_2 = 9$ sein</u>

Dann gilt $11a_1 + 2a_0 = 1003 - 909 = 94$

Wegen $11a_1 = 94 - 2a_0 = 2 \cdot (47 - a_0)$ muss <u>a_1 gerade</u> sein

Fall a: $a_1 = 8 \qquad 88 + 2a_0 = 94 \Rightarrow a_0 = 3$

<u>2. Lösung $n = 1983 \quad Q(n) = 21$</u>

Fall b: $a_1 \leq 6 \qquad 11a_1 + 2a_0 \leq 66 + 2a_0 \underset{a_0 \leq 9}{\leq} 84$

Also sind für $a_1 \leq 6$ keine (weiteren) Lösungen mehr möglich.

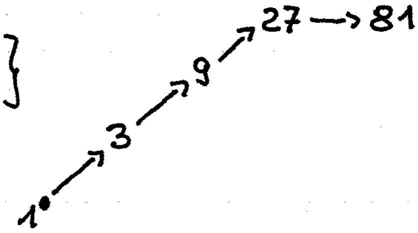
5b) Vorlesung: $n \equiv Q(n) \mod 9$

$\Leftrightarrow \; n - Q(n) \equiv 0 \mod 9$

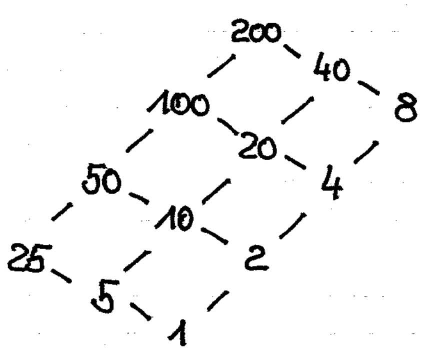
$\Leftrightarrow \; 9 \mid n - Q(n)$

D.h. die Differenz $n - Q(n)$ ist für alle n durch 9 teilbar. 2004 ist aber nicht durch 9 teilbar.

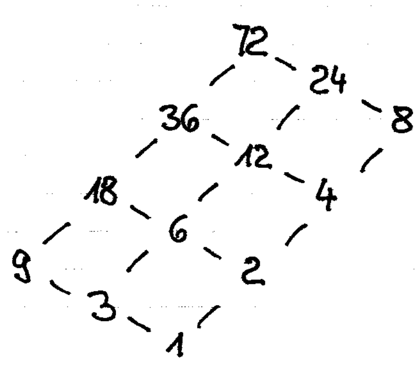
6. $T(81) = \{1, 81, 3, 27, 9\}$



$T(200) = \{1, 200, 2, 100, 4, 50, 5, 40, 8, 25, 10, 20\}$

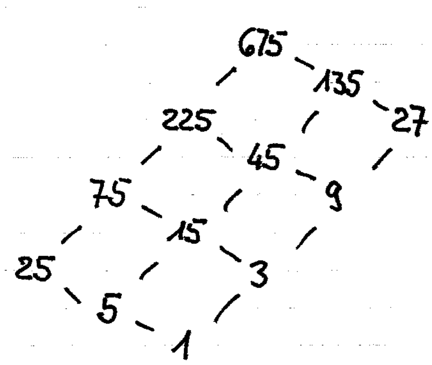


$T(72) = \{1, 72, 2, 36, 3, 24, 4, 18, 6, 12, 8, 9\}$



Es fällt auf, dass alle drei Diagramme im Prinzip gleich sind. Das liegt an der gleichen Form der PFZ.

$T(675 = \{1, 675,$
$3, 225,$
$5, 135,$
$15, 45,$
$9, 75,$
$25, 27\}$

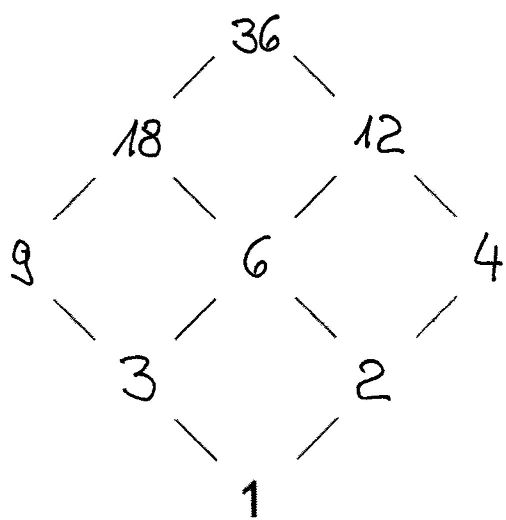


7. Die gesuchte Zahl muss die PFZ der Form $n = p^2 \cdot q^2$ haben und ist damit eine Quadratzahl (siehe Aufg. 3).

Damit gibt es folgende Lösungen:

$n = (2 \cdot 3)^2 = 36$ oder $n = (2 \cdot 5)^2 = 100$ oder

$n = (2 \cdot 7)^2 = 196$ oder $n = (3 \cdot 5)^2 = 225$ ......



Figur 2