Reimund Albers, Einführung in die Mathematik I, WiSe 04/05
Übung 5 Lösungsskizzen

Präsenzübungen

1a Beispiele: $1+3+3+1 = 8 = 2^3$

$$1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$$

Das n ergibt sich immer aus der 2. Zahl der Zeile, der Zeilennummer.

1. Begründung: $(a+b)^n = p_0 a^n + p_1 a^{n-1} b^1 + p_2 a^{n-2} b^2 + \dots$

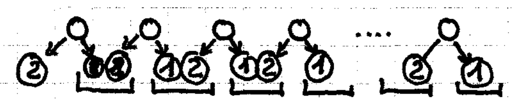
$$\dots + p_{n-1} a b^{n-1} + p_n b^n$$

wobei die p_i, $i = 0, 1, \dots, n$ die Zahlen aus dem Pascalschen Dreieck in der n-ten Zeile sind. Setzt man $a = 1$ und $b = 1$ so sind alle Potenzen von a und b gleich 1. Also gilt

$$(1+1)^n = 2^n = p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + p_n$$

2. Begründung

Der Rechenformalismus im Pascalschen Dreieck ist:



Jede Zahl ist die Summe der beiden darüber stehenden Zahlen, in Zeichen ①②. Also kommt die gesamte obere Zeile zwei Mal in der unteren Zeile vor. Einmal über den Summanden ①, ein zweites Mal über den Summanden ②. Also ist die Summe der unteren Zeile zwei Mal die Summe der oberen Zeile.

Da in Zeile 1 $1+1 = 2 = 2^1$ steht, steht in Zeile 2 $2 \cdot 2 = 2^2$, Zeile 3 $2 \cdot 2^2 = 2^3$ u.s.w.

1b) $a^7 b^5$ kommt (nur) in der Entwicklung von $(a+b)^{12}$ vor. $(7+5=12)$
Nun zählt man in Zeile 12 von links von 12 ab herunter bis 7. In dieser Zelle steht 792.

2. Dreistellige Zahl: $100a + 10b + c$
Doppelte der Quersumme: $2(a + b + c)$
Dreifaches der ~~Hunderter~~ Einer $\cancel{3a}$ $3c$

$$102a + 12b + 6c$$
$$= 6 \cdot (17a + 2b + c)$$

was offensichtlich durch 6 teilbar ist

Idee für weitere Aufgaben: Man wählt eine Zahl m für die Teilbarkeit. Dann erhöht/verringert man die Zehnerpotenzen so, dass eine durch m teilbare Zahl entsteht. Das beschreibt man in der Aufgabenstellung, ggfs leicht abgeändert [Beispiel oben: $100 \to 102$, $10 \to 12$, $1 \to 6$]

HAUSÜBUNGEN

3. „Wo man singt, da lass dich nieder" $A \Rightarrow B$
„böse Menschen kennen keine Lieder" $\neg B \Rightarrow \neg A$
Der zweite Teil ist praktisch die Kontraposition des ersten Teils, also eine logisch äquivalente Wiederholung. Damit besagt das Sprichwort aber nur die Implikation $A \Rightarrow B$, nicht aber die Äquivalenz.

4. Wie in Aufgabe 1a schreiben wir

$(a+b)^n = p_0 a^n + p_1 a^{n-1} b + p_2 a^{n-2} b^2 + \dots + p_{n-1} a b^{n-1} + p_n b^n$

Setzt man nun speziell $a = 1$ und $b = -1$, ergibt sich

$(1-1)^n = 0 = p_0 \cdot 1 + p_1 \cdot 1 \cdot (-1) + p_2 \cdot 1 \cdot (+1) + \dots + p_{n-1} \cdot 1 \cdot (-1)^{n-1} + p_n (-1)^n$

$= p_0 - p_1 + p_2 - + \dots + (-1)^{n-1} p_{n-1} + (-1)^n p_n$

Letztes ist die alternierende Summe der Zahlen in einer Zeile des Pascalschen Dreiecks.

5. $10 \equiv 4 \mod 6$

$100 = 10 \cdot 10 \equiv 4 \cdot 4 = 16 \equiv 4 \mod 6$

$1000 = 10 \cdot 100 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 4 \mod 6$

Also werden ab der 10er-Ziffer alle Ziffern mit 4 multipliziert.

158234 gewichtete Quersumme $(1+5+8+2+3) \cdot 4 + 4$

$= 19 \cdot 4 + 4 = 80 = 13 \cdot 6 + 2$

Also ist die Zahl nicht durch 6 teilbar, sondern lässt einen Rest von 2.

Probe mit dem Taschenrechner: $158234 - 2 = 158232$

$158232 : 6 = 26372$

6. Beispiel: $158234 \xrightarrow{QS} 23 \xrightarrow{QS} 5$

Probe: $158234 - 5 = 158229 \xrightarrow{QS} 27$, also durch 9 teilbar ✓

Begründung: $n = 10^m a_m + \dots + 100 a_2 + 10 a_1 + a_0$

$n \equiv a_m + \dots + a_2 + a_1 + a_0 \mod 9$

da $10^i \equiv 1 \mod 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Bildet man für die Quersumme $Q_1 = a_m + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ wieder die Quersumme Q_2, so gilt wieder

$Q_1 \equiv Q_2 \mod 9$. Also gilt für das iterierte Bilden von Quersummen: $n \equiv Q_1 \equiv Q_2 \equiv \dots \equiv Q_k \mod 9$

6 Forts.

wobei Q_K eine einstellige Zahl ist, d.h. $9 \leq Q_K \leq 1$

Also gilt $n \equiv Q_K \mod 9$ oder $n = q \cdot 9 + Q_K$

Q_K ist also der Rest beim Teilen durch 9, wobei allerdings immer 9 statt 0 herauskommt.

7. Zu zeigen: $a|b$ und $b|c \Rightarrow a|c$

Beweis: $a|b \Rightarrow b = q_1 \cdot a$

$b|c \Rightarrow c = q_2 \cdot b$ $\quad q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$

Betrachte nun c: $c = q_2 \cdot b = \underbrace{(q_2 \cdot q_1)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot a$

c ist also ein Viefaches von a $\Leftrightarrow a|c$