Reimund Albers, Einführung in die Mathematik I, WiSe 04/05

Übung 3 Lösungsskizzen

1. a) Es gibt einen Menschen in diesem Hörsaal, der nicht Mathematik studiert.

   b) Alle meine Tulpenzwiebeln sind aufgegangen.

   c) Es gibt in dieser Klasse (wenigstens) einen Schüler, der weder in Mathe noch in Englisch gut ist. [„weder A noch B": $\neg A$ und $\neg B$]

2. Man teilt 4839267 durch 38429 und erhält 125,92747... Also passt 38429 125 Mal ganz in 4839267 mit einem Rest, der durch die Ziffern hinter dem Komma gegeben ist. Also zieht man vom Ergebnis 125 ab und erhält 0,92747.... . Multipliziert man das mit 38429 so erhält man den ganzzahligen Rest. Rundungsfehler können zu nicht ganzzahligen Ergebnissen führen. Dann muss man mit Runden und Endstellenprobe das Ergebnis ermitteln

   $0{,}92747\ldots \cdot 38429 = 35641{,}9999$

   Also: $4839267 = 125 \cdot 38429 + 35642$

   Endstellenprobe: $5 \cdot 9 = 45 \quad 5 + 2 = 7$ stimmt

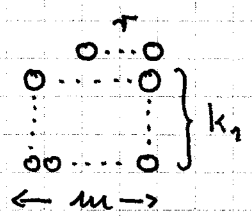
3. Beispiel: $15 = 2 \cdot 6 + 3$ und $27 = 4 \cdot 6 + 3$
   (mod 6)

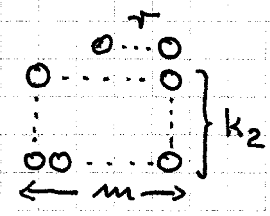
   $\Rightarrow 27 - 15 = 12 = 2 \cdot 6$

   umgekehrt: $5 + 18 = 23$ also $23 - 5 = 18 = 3 \cdot 6$

   $23 = 3 \cdot 6 + 5$ und $5 = 0 \cdot 6 + 5$

3 (Forts.) Punktemuster allgemein mod m

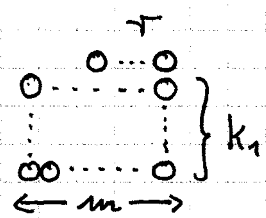




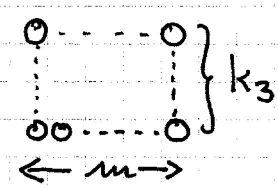
$a = k_1 \cdot m + r$ $\qquad$ $b = k_2 \cdot m + r$

Zieht man beide Zahlen voneinander ab, so ergeben die beiden gleichen, unvollständigen Zeilen Null. Bleiben die vollständigen Zeilen, die voneinander abgezogen vollständige Zeilen ergeben. D.h., dass die Differenz durch m teilbar ist.

umgekehrt: $\quad a = m \cdot k_1 + r$

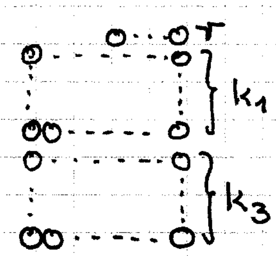


Ist der Unterschied von a und b durch m teilbar heißt das: $b - a = m \cdot k_3$



b erhält man nun durch

$a + (b-a) = b$



Die obere, unvollständige Reihe ist dann die von a, denn der „Sockel" von $b-a$ besteht aus vollständigen Zeilen.

<u>formal</u> „$\Rightarrow$" Sei $a = k_1 m + r$ und $b = k_2 m + r$

Dann ist $a - b = (k_1 m + r) - (k_2 m + r)$

$= k_1 m - k_2 m$

$= (k_1 - k_2)\, m$ $\quad$ also durch m teilbar

3 (Forts.) formal „$\Leftarrow$"

Differenz $b - a = k_3 m$.

Sei a eine beliebige Zahl. ~~m~~ Dann gibt es Zahlen k_1, r mit $a = k_1 m + r$

Dann ist
$$\begin{aligned} b &= a + (b-a) \\ &= k_1 m + r + k_3 m \\ &= (k_1 + k_3) m + r \end{aligned}$$

Also ist der Rest von b so groß wie der von a.

HAUSÜBUNGEN

4. logische Form $\forall n \in \mathbb{N}: A \Rightarrow B$

Verneinung $\neg(\forall n \in \mathbb{N}: A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \neg(A \Rightarrow B)$

$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \text{ oder } B) \Leftrightarrow A \text{ und } \neg B$

also endgültige Form: $\exists n \in \mathbb{N}: A \text{ und } \neg B$

„Es gibt eine natürliche Zahl, deren Quersumme durch 8 teilbar ist, die aber selbst nicht durch 8 teilbar ist"

5. (Eine Freundin aus dem Bankbereich schaute mich wegen dieser Aufgabe ungläubig an: „Das weiß doch jeder!")

3. 11. 2004 $\xrightarrow{+365 \text{ Tage}}$ 3. 11. 2005

$365 = 52 \cdot 7 + 1$ Also ist der Wochentag nach einem Jahr gerade um 1 weitergerückt, es ist ein Donnerstag.

3. 11. 2004 $\xrightarrow{-366 \text{ Tage}}$ 3. 11. 2003 Denn 2004 war ein Schaltjahr, es kommt noch der 29. 2. 2004 dazu

$366 = 52 \cdot 7 + 2$ Also muss man 2 Wochentage zurückspringen, der 3. 11. 2003 war ein Montag.

6\. a) Das ist richtig.

Wir hatten in der Vorlesung

$a \equiv b \bmod m$ und $c \equiv d \bmod m \Rightarrow ac \equiv bd \bmod m$

Ist speziell $c = a$ und $d = b$ so ergibt sich

$a \equiv b \bmod m \; (\underbrace{\text{und } a \equiv b \bmod m}_{\text{überflüssig}}) \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \bmod m$

b) Das ist falsch

Gegenbeispiel: $36 \equiv 64 \bmod 4$, denn beide Zahlen lassen keinen Rest.

$6 \not\equiv 8 \bmod 4$, denn $6 = 1 \cdot 4 + 2$, $8 = 2 \cdot 4 + 0$

verschieden

7\. a) $39 = 3 \cdot 12 + 3$, $5 \cdot 12 + 3 = 63$ also $39 \equiv 63 \bmod 12$

$d = 4$ ist ein Teiler von $m = 12$

$39 = 9 \cdot 4 + 3$ $\quad 63 = 15 \cdot 4 + 3$ $\quad$ also auch $39 \equiv 63 \bmod 4$

b)

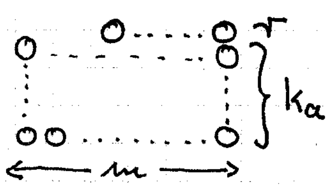
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	.....							

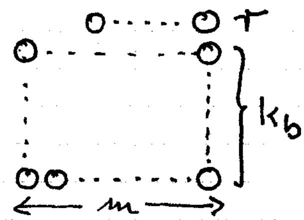
$a \equiv b \bmod 10$, wenn a und b in derselben Spalte stehen.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	....		

Zahlen, die oben in einer Spalte stehen, stehen hier auch in einer Spalte. Da $5 \cdot 2 = 10$ ist, wird jede 10er-Zeile in 2 gleich lange 5er-Zeilen zerschnitten „dazwischen geschoben". Zahlen, die im 10er-Muster in einer Spalte waren, bleiben in einer Spalte, sie stehen untereinander nur etwas weiter weg.

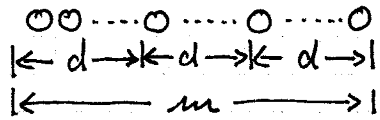
7. (Forts.) c)



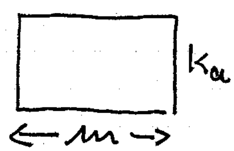


$a = k_a \cdot m + r$ $\qquad$ $b = k_b \cdot m + r$ $\qquad$ also $a \equiv b \mod m$

d Teiler von m :



Jede m-Zeile kann in mehrere d-Zeilen zerlegt werden. Ordnet man um, wird aus dem Rechteck



ein neues Rechteck der Breite d (und neuer Höhe). Die r bleiben übrig. Genau so ist es bei b. Die Reste bleiben gleich. Ist $r > d$, kann man neue d-Zeilen bilden, aber der Rest bleibt gleich. Also ist auch $a \equiv b \mod d$

d) $a \equiv b \mod m \Rightarrow a - b = k \cdot m$, $k \in \mathbb{Z}$

Da d Teiler von m, gibt es ein q mit $m = q \cdot d$.

Also $a - b = \underbrace{k \cdot q}_{} \cdot d = k' \cdot d$ $\qquad$ Die Differenz $a-b$ ist ein Vielfaches von d

$\Rightarrow a \equiv b \mod d$