Reimund Albers, Einführung in die Mathematik I

Übung 1 Lösungsskizzen WiSe 04/05

Präsenzübungen

1. Startzahl n 3 Schritte: $7n - 12 + x$

durch 7 teilbar, wenn $x - 12$ durch 7 teilbar ist

a) Für $15 \leq x \leq 30$ ist das für $x = 19$ oder $x = 26$

$x = 19$ dann sind 4 Schritte: $(7n + 7) : 7 = n + 1$

b) dann muss $\pm y$ 0 sein

$x = 26$ dann sind 4 Schritte: $(7n + 14) : 7 = n + 2$

b) dann muss $\pm y$ -1 sein

c) $x = 19$

	$\cdot 7$	-12	$+19$	$:7$
n	$7n$	$7n-12$	$7n+7$	$n+1$

Will man negative Zahlen vermeiden (bis Klasse 6), so muss $n \geq 2$ sein, denn dann bleibt $7n - 12$ positiv

2	14	2	21	3
3	21			

$x = 26$ Auch hier gilt $n \geq 2$

	$\cdot 7$	-12	$+26$	$:7$	-1
2	14	2	28	4	3
3	21	9	35	5	4

Also: beide Möglichkeiten sind für das „Kopfrechnen um die Wette" nicht geeignet.

2. a) $2n$, $n \in \mathbb{N}$ b) $6n$, $n \in \mathbb{N}$

c) $10n + 7$, $n \in \mathbb{N}$ d) $10n + 7$, $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$

3. a) $(a+b):c = a:c + b:c \quad , a,b,c \in \mathbb{R}$

Beispiel: $(72+18):9 = 90:9 = 10$

$72:9 + 18:9 = 8 + 2 = 10$

b) $(a\cdot b):c = (a:c)\cdot b = a\cdot(b:c) \quad a,b,c \in \mathbb{R}$

oder $\frac{a\cdot b}{c} = \frac{a}{c}\cdot b = a\cdot\frac{b}{c}$

Brüche sind übersichtlicher!

Beispiel $\frac{33\cdot 55}{11} = \frac{1815}{11} = 165$

$\frac{33}{11}\cdot 55 = 3\cdot 55 = 165$

$33\cdot\frac{55}{11} = 33\cdot 5 = 165$

4. a) In dem Beispiel sieht man, dass eine Zahl, die beim Teilen durch 3 den Rest 2 lässt, nämlich 8, plus eine Zahl, die beim Teilen durch 5 den Rest 2 lässt, nämlich 22, nicht eine Zahl ergibt die beim Teilen durch 8 den Rest 4 ergibt, denn 30 lässt den Rest 6.

Die Voraussetzungen sind erfüllt, trotzdem ~~gi~~ wird die Behauptung nicht erfüllt

b) Findet man (wenigstens) ein Gegenbeispiel, so ist die Aussage, die etwas für alle Zahlen behauptet, falsch.

c) Also ist in dem Beweis ein Fehler

richtig:

$$\begin{aligned} a &= 3n_1 + 2 \\ b &= 5n_2 + 2 \\ \hline a+b &= 3n_1 + 5n_2 + 4 \end{aligned}$$

n_1 kann von n_2 verschieden sein

Jetzt ist über die Teilbarkeit durch 8 keine Aussage möglich.

Hausübungen

5 a) $2n+1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

b) $7n+3 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

c) $10a + (a+1) \qquad a \in \{1,2,\dots,8\}$

$= 11a + 1$

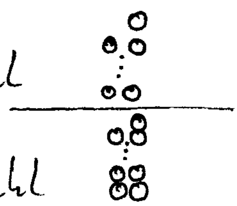
d) a Hunderter- , b Zehner- und c Einerziffer

$$\underbrace{100a + 10b + c}_{\text{Zahl}} + \underbrace{a+b+c}_{\text{Quersumme}} \qquad , a, \cancel{b,c} \in \{1,2,\dots 9\} \quad b,c \in \{0,1,2,\dots 9\}$$

$= 101a + 11b + 2c$

6. a) $7 + 5 = 12$

b) 1. ungerade Zahl



2. ungerade Zahl

Legt man beide Punktemuster aneinander, so ergänzen sich die beiden Einer zu einer kompletten Zweierschicht.

c) 1. ungerade Zahl $\quad u_1 = 2 \cdot n_1 + 1 \qquad n_1 \in \mathbb{N}$

2. ungerade Zahl $\quad u_2 = 2 \cdot n_2 + 1 \qquad n_2 \in \mathbb{N}$

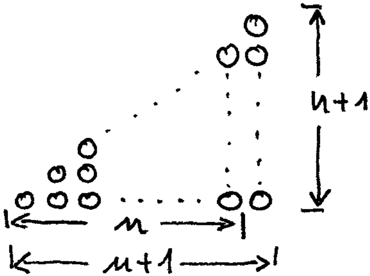
$$u_1 + u_2 = 2n_1 + 2n_2 + 2$$
$$= 2 \cdot \underbrace{(n_1 + n_2 + 1)}_{\in \mathbb{N}}$$

Also ~~sind~~ ist $u_1 + u_2$ eine gerade Zahl

7. $D(n+1) - D(n) = n+1$

a) $D(\underset{n+1}{5}) = 15 \qquad D(\underset{n}{4}) = 10 \qquad 15 - 10 = 5$

7 b)



Das Dreieck bis n hat die rechte Spalte weniger, das sind $n+1$ Punkte

c) $D(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

also $D(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$D(n+1) - D(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2}(n+2) - \frac{n+1}{2}n$$

$$= \frac{n+1}{2}\left[n+2 - n\right]$$

$$= \frac{n+1}{2} \cdot 2 \quad = \underline{\underline{n+1}}$$