5. Logik, eine Menge Formalismus, und das Formen von Mengen

5.1. Grundlagen

Eine frühe (und für lange Zeit in der abendländischen Philosophie prägende) Systematisierung logischer Schlussweisen findet man bei Aristoteles (384–322 v. Chr.).

Zu den von Aristoteles formulierten, Grund legenden Sätzen gehören:

Gesetz der Widerspruchsfreiheit: „A“ und „nicht A“ können nicht beide wahr sein.

Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten *(tertium non datur)*:
„A“ oder „nicht A“ ist wahr.

Hierbei steht jeweils A für eine Aussage — was das genau ist, bedarf der Klärung (und wird auch seit Aristoteles thematisiert).

In modernen Untersuchungen zur Logik werden auch Systeme betrachtet, in denen das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten nicht gilt. Dazu lässt man weitere Wahrheitswerte neben „wahr“ und „nicht wahr“ zu.

Als ein ausgereiftes Beispiel einer solchen mehrwertigen Logik darf die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie gelten.

Spätestens seit dem Auftreten von Paradoxien in der von Cantor (1845–1918) begründeten abstrakten Mengenlehre ist klar, dass man Regeln braucht, die die uferlose Bildung von „Aussagen“ begrenzen. Dabei hat es sich als praktikabel erwiesen, Bildungsregeln aufzustellen, die die Konstruktion gewisser Aussagen aus bereits zulässig konstruierten erlauben.

Wir diskutieren damit nicht mehr, was eine einzelne Aussage ist, sondern wie man aus gegebenen Aussagen neue bilden kann. Dabei ist man insbesondere daran interessiert, wie man allein aus dem Wissen über das Bildungsgesetz und die „Wahrheitswerte“ der darin eingehenden Aussagen auf die Wahrheit der zusammengesetzten Aussage schließen kann.

Man formt zuerst aussagenlogische Ausdrücke, in die Aussagenvariablen eingehen. Durch Belegung der Variablen erhält man Aussagen.

Hinter diesem Umgang mit den so gebildeten Ausdrücken steht das Extensionalitäts-Prinzip:
Die Wahrheit einer Aussage (die durch Belegung der in ihr vorkommenden Variablen entsteht) hängt **nur** von der Belegung der Variablen ab.

Beispiel:
Der Ausdruck „A und B“ wird genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.
Wir können das in einer Wahrheitswert-Tabelle darstellen:

A	B	„A und B“
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Nach dem Extensionalitäts-Prinzip kann man jeden aussagenlogischen Ausdruck als eine Funktion auffassen, die den Wahrheitswerten der Variablen einen Wahrheitswert zuordnet.
Die Wahrheitswert-Tabelle ist nichts anderes als die explizite Angabe dieser Zuordnung.

Beispiel: Belegt man die Aussagenvariable A mit der Aussage „4 ist eine gerade Zahl“ und B mit „4 ist kleiner als 3“, so wird $A \wedge B$ mit „4 ist gerade und kleiner als 3“ belegt. Nur A liefert jetzt eine wahre Aussage, dagegen liefern B und $A \wedge B$ falsche Aussagen. Dies entspricht der zweiten Zeile der Wahrheitswert-Tabelle.

Beispiel: Belegt man A mit der Aussage „die gesuchte Zahl ist gerade“ und B mit „die gesuchte Zahl ist kleiner als 4“, so wird (unter der Grundannahme, dass wir nur unter den natürlichen Zahlen suchen), so liefert $A \wedge B$ eine Aussage, die 2 als die gesuchte Zahl kennzeichnet.

Im zweiten Beispiel haben wir Aussagen vorliegen, in die noch eine „Individuen-Variable“ eingeht. Wir werden dies später wieder aufnehmen und noch etwas präzisieren. Im Moment halten wir fest: Bei der gewählten Belegung wird A wahr, wenn die gesuchte Zahl aus dem Bereich $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots$ stammt, dagegen wird B dann wahr, wenn die gesuchte Zahl eine der Zahlen $1, 2, 3$ ist. Die einzige Zahl, für die beide Aussagen (und damit die Belegung von $A \wedge B$) wahr werden, ist 2.
Man kann das auch so sehen: Wir haben Lösungsmengen $L_A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\}$ und $L_B = \{1, 2, 3\}$ zum Schnitt gebracht. Der hier zu Grunde liegende Zusammenhang zwischen $L_A \cap L_B$ und $L_{A \wedge B}$ wird unten genauer thematisiert.

5.2. Konstruktion von Ausdrücken

Wir legen einige Verknüpfungen (Junktoren) von Ausdrücken als Grundkonstruktionen für alles Weitere fest.

Nach dem Extensionalitäts-Prinzip tun wir das über Wahrheitswert-Tabellen:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

In Worten ausgedrückt:

$\neg A$	heißt	die Negation von A
$A \wedge B$	bedeutet	„A und B“ (ein alter Bekannter)
$A \vee B$		„A oder B“ (wobei nicht ausgeschlossen ist, dass beide wahr sind)
$A \to B$		„A impliziert B“ / „wenn A, dann auch B“
$A \leftrightarrow B$		„A und B sind äquivalent“ / „A genau dann, wenn B“

Jetzt können wir sagen, wie Ausdrücke konstruiert werden:

Die folgenden Zeichenreihen sind logische Ausdrücke:

- die Konstanten w und f.
- die Aussagenvariablen $(A, B, C, D, E, F, G, \dots \quad p_0, p_1, p_2, \dots)$
- sind X und Y Ausdrücke, so auch die Zeichenreihen

$$\neg X\,, \quad (X \wedge Y)\,, \quad (X \vee Y)\,, \quad (X \to Y)\,, \quad (X \leftrightarrow Y)\,.$$

Wir haben damit eine sehr strenge Sprache festgelegt, mit sehr eingeschränktem Vokabular, und sehr restriktive Grammatik.

Es hat sich gezeigt, dass diese strenge Sprache hervorragend dazu geeignet ist, mathematische Sachverhalte, Behauptungen und Beweisführungen klar und unmissverständlich zu kommunizieren. Das soll aber nicht heißen, dass man Mathematik nur in einer solch restriktiven Sprache kommunizieren könnte — wir versuchen (schon seit 51 Seiten) gerade das Gegenteil.

Notwendig wird diese forale Sprache immer dann, wenn man merkt, dass man sich anders nicht verständlich machen kann, weil die Alltagssprache auch in ihrer wissenschaftlichen Verfeinerung nicht präzise genug ist.

5.3. Äquivalenz logischer Ausdrücke

Zwei Ausdrücke X und Y heißen äquivalent (oder werteverlaufsgleich), wenn für jede simultane Belegung der in X und Y vorkommenden Aussagenvariablen beide Ausdrücke denselben Wahrheitswert liefern.

Man schreibt $X \equiv Y$.

Beispiele: Es seien A, B Variablen.

$X = (A \to B) \wedge (B \to A)$ und $Y = (A \leftrightarrow B)$ sind äquivalent:

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

$(A \to B) \equiv (\neg A \vee B)$:

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \to B$
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Man könnte sich demnach einige der Junktoren sparen (und z. B. allein mit $\neg$ und $\vee$ auskommen), aber $\wedge$, $\to$ und $\leftrightarrow$ sind doch recht bequeme Abkürzungen.

Wichtige Äquivalenzen („Rechengesetze"):

$$\begin{array}{rclrclrcl} & & & & & & \neg(\neg X) & \equiv & X\,, \\ X \vee X & \equiv & X\,, & X \vee Y & \equiv & Y \vee X\,, & \neg(X \vee Y) & \equiv & (\neg X \wedge \neg Y)\,, \\ X \wedge X & \equiv & X\,, & X \wedge Y & \equiv & Y \wedge X\,, & \neg(X \wedge Y) & \equiv & (\neg X \vee \neg Y)\,. \end{array}$$

Die Regeln von de Morgan:

$$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)\,, \qquad X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

5.4. Das Prinzip des Widerspruchs-Beweises

Auch die folgende Äquivalenz lässt sich ganz leicht an Hand von Wahrheitswert-Tabellen verifizieren:

$$(A \to B) \equiv (\neg B \to \neg A)$$

Man kann auch so schließen:

$$(A \to B) \equiv (\neg A \vee B) \equiv (B \vee \neg A) \equiv \big(\neg(\neg B) \vee (\neg A)\big) \equiv (\neg B \to \neg A)\,.$$

Für Beweise in der Mathematik ist diese unscheinbare Feststellung von großer Wichtigkeit:

Statt zu beweisen, dass eine Aussage A eine andere Aussage B impliziert, kann man auch annehmen, die Aussage B sei falsch, und daraus ableiten, dass auch A falsch sein muss.

Beispiel: Wir wollen zeigen: Jede Primzahl größer 2 ist ungerade.
Formalisierung: Sei $P(n)$ die Aussage „n ist prim" und sei $U(n)$ die Aussage „n ist ungerade", dann haben wir zu zeigen, dass für $n > 2$ die Aussage $P(n) \to U(n)$ wahr ist.
Statt dessen betrachten wir die Aussage $\neg U(n) \to \neg P(n)$, also:
„Wenn n nicht ungerade ist, ist n keine Primzahl". Dies heißt nichts Anderes als „Wenn n durch 2 teilbar ist, ist n keine Primzahl" — was für natürliche Zahlen größer als 2 eine Banalität ist.

5.5. Prädikative Ausdrücke

Für ernsthafte mathematische Aussagen sind unsere Ausdrücke noch viel zu schwach:

Wir sollten auch in der Lage sein, eine Aussage wie „Zu jeder Primzahl gibt es noch eine, die wenigstens drei mal so groß ist" in diesem Rahmen zu fassen.

Dazu müssen wir einerseits über Mengen reden, über die Elemente dieser Mengen (Individuen), und über gewisse Relationen zwischen Individuen.

Für eine Menge M und ein Individuum j schreiben wir $j \in M$, wenn j ein Element dieser Menge ist, sonst schreiben wir $\neg(j \in M)$ oder kürzer $j \notin M$.

Um mit logischen Ausdrücken so hantieren zu können, wie wir das in mathematischen Erörterungen brauchen, lassen wir in den Ausdrücken jetzt auch Individuen-Konstanten und Individuen-Variablen zu und erlauben die Bildung von Aussagen wie „das Individuum j gehört zur Menge M" oder „die Individuen x und y stehen in der Relation R zu einander".

Beispiele: Es sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen.
Dann gilt $3 \in \mathbb{P}$, und auch die Aussage $(7 \in \mathbb{P}) \wedge (9 \notin \mathbb{P})$ ist wahr.

Zulässige (aber nicht unbedingt wahre) Aussagen sind jetzt auch

$$4 \in \mathbb{P} \qquad \text{oder} \qquad (x > 15) \wedge (3 \cdot x < 200)\,.$$

5.6. Quantoren

Was wir jetzt noch brauchen, ist eine Fassung der Quantoren „es gibt (wenigstens ein) Individuum derart, dass gilt …“ sowie „für alle … gilt …“

Man schreibt $\exists$ für den Existenz-Quantor:

$$\exists p \in \mathbb{P}\,(p > 99\,999\,999)$$

ist die Aussage

„es gibt eine Primzahl p derart, dass p größer ist als 99 999 999“

oder „es gibt eine Primzahl mit mehr als 8 Stellen“.

Man schreibt $\forall$ für den All-Quantor:

$$\forall p \in \mathbb{P}\,(p > 99\,999\,999)$$

ist die Aussage

„für jede Primzahl p gilt: p ist größer als 99 999 999“

oder „jede Primzahl hat mehr als 8 Stellen“.

5.7. Mengen, Aussonderung von Teilmengen

Wir betreiben hier keine axiomatische Mengenlehre, sondern gehen „naiv“ vor (im Sinne von HALMOS 1976). Wir denken uns Mengen als Zusammenfassungen von Individuen, die Grund legende Beziehung ist die Element-Beziehung $\in$.

Man kann Mengen einfach durch Aufzählung ihrer Elemente angeben:

$$\{1,2,3,4,5,6\}, \qquad \{1,C,d,198\}, \qquad \{1,2,3,4,5,6,7,\ldots\}, \qquad \{3,5,7,\ldots\}$$

Bei den letzten beiden Beispielen wird ein Problem offenbar: Weiß man wirklich, welche Elemente zur Menge gehören? Es ist besser, aus einem gegebenen „Universum“ die fraglichen Elemente durch eine Bedingung auszusondern:

Beispiele: Wir betrachten als „Universum“ die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, und außerdem einen Ausdruck $P(x)$, in dem eine Individuen-Variable x vorkommt.
Die Menge aller natürlichen Zahlen x, für die $P(x)$ wahr ist, schreiben wir als

$$\{x \in \mathbb{N} \mid P(x)\}.$$

Konkreter:
Sei etwa $P(x)$ die Aussage „x ist prim“, weiter sei $G(x)$ die Aussage „x ist gerade“.
Dann könnte mit der letzten der oben angegebenen Mengen gemeint sein

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \neg G(x)\}, \qquad \text{aber auch} \qquad \{x \in \mathbb{N} \mid P(x) \wedge (x > 2)\},$$

oder etwas ganz anderes ...

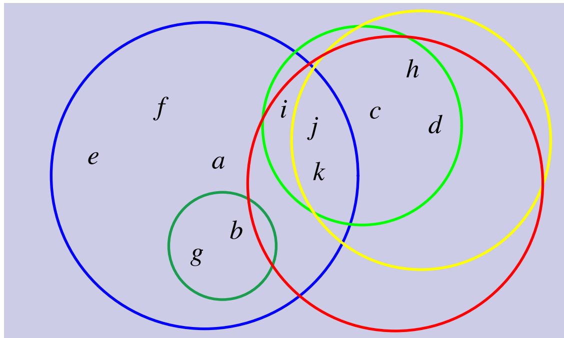
Extensionalität: Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.

Es gilt also $\quad (X = Y) \leftrightarrow ((\forall x \in X(x \in Y)) \wedge (\forall y \in Y(y \in X)))$.

Diese Aussage lässt sich leichter handhaben, wenn wir sie in zwei Hälften zerlegen. Eine Menge T heißt Teilmenge einer Menge M, wenn jedes Element von T auch Element von M ist. Wir schreiben dann $T \subseteq M$. Formelhaft:

$$\begin{aligned} T \subseteq M &\leftrightarrow (\forall t \in T(t \in N)) \qquad \text{und damit} \\ X = Y &\leftrightarrow (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X)\,. \end{aligned}$$

Beispiele:
Die farbigen Kreise sondern aus der Menge $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ die folgenden Teilmengen aus:
$T_{\text{blau}} = \{a, b, e, f, g, i, j, k\}$,
$T_{\text{dunkelgrün}} = \{b, g\}$, $T_{\text{rot}} = \{c, d, h, i, j, k\}$,
$T_{\text{gelb}} = \{c, d, h, j, k\}$



Der hellgrüne Kreis definiert genau die gleiche Menge wie der rote.
Es gilt $\quad T_{\text{dunkelgrün}} \subseteq T_{\text{blau}} \quad$ und $\quad T_{\text{gelb}} \subseteq T_{\text{rot}}$.

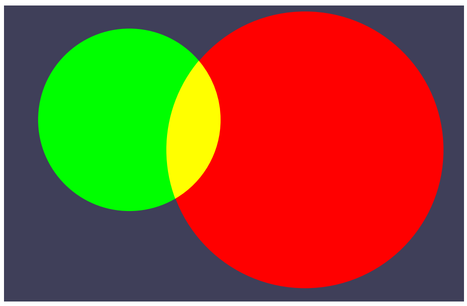
5.8. Junktoren und Mengen-Operationen

Wenn man durch Aussagen Mengen aussondert, fragt man sich, wie sich die Verbindung von Aussagen durch Junktoren auf die Mengenbildung auswirkt.

Man kann hier tatsächlich direkt übertragen:

Es seien $P(x)$ und $Q(x)$ Aussagen mit einer Individuen-Variablen x, und es sei U eine Menge. Wir schreiben $T_P := \{x \in U \mid P(x)\}$ und $T_Q := \{x \in U \mid Q(x)\}$.

- Die Menge $T_P \cap T_Q := \{x \in U \mid P(x) \wedge Q(x)\}$ ist die Schnittmenge.
- Die Menge $T_P \cup T_Q := \{x \in U \mid P(x) \vee Q(x)\}$ ist die Vereinigungsmenge.
- Die Menge $\quad U \setminus T_P := \{x \in U \mid \neg P(x)\}$ ist das (relative) Komplement.



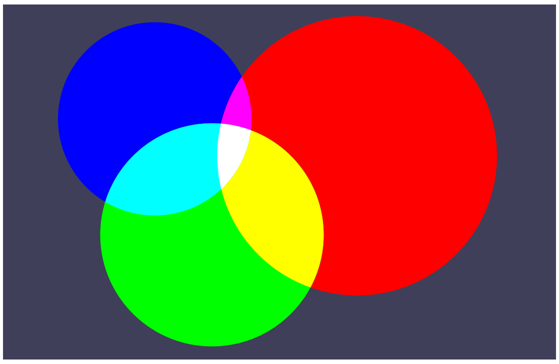
Wir haben vorher schon gesehen, dass die Äquivalenz der Aussagen $P(x)$ und $Q(x)$ der Gleichheit der Mengen T_P und T_Q entspricht. Die Implikation entspricht der Relation „$\subseteq$“:

Es gilt $\quad \forall x \in U \, \big(P(x) \to Q(x)\big) \quad$ genau dann, wenn $\quad T_P \subseteq T_Q$.

Man kann jetzt alle Äquivalenzen (Implikationen) von Aussagen in Gleichheiten (Inklusionen) von Mengen übersetzen — und umgekehrt.
Beispielsweise ergeben die Regeln von de Morgan für Mengen:

$$A \cap (B \cup C) \quad = \quad (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) \quad = \quad (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



Um etwa die erste dieser Mengenidentitäten einzusehen, schreibt man

$$\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= A \cap \{x \in U \mid (x \in B) \vee (x \in C)\} \\
&= \big\{x \in U \mid (x \in A) \wedge \big((x \in B) \vee (x \in C)\big)\big\} \\
&= \big\{x \in U \mid \big((x \in A) \wedge (x \in B)\big) \vee \big((x \in A) \wedge (x \in C)\big)\big\} \\
&= \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \cup \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in C)\} \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C)\,.
\end{aligned}$$