Kapitel 2

Aussagenlogik

2.1 Aussagen

In der Aussagenlogik, die auch *Junktorenlogik* genannt wird, werden – wie es der Name schon sagt – Aussagen und insbesondere deren Verbindung zu neuen, komplexeren Aussagen betrachtet. Wir beschäftigen uns somit zunächst mit der Frage, was unter einer Aussage verstanden werden soll.
Die grundlegende Annahme, die die Aussagenlogik macht, ist, *dass eine Aussage entweder wahr oder falsch ist.*
Bereits Aristoteles hat empfohlen, diese Hypothese dem Aufbau der Logik zugrunde zu legen. Deshalb spricht man in diesem Zusammenhang auch von *aristotelischen Aussagen*. Beispiele für Aussagen sind also:

Tübingen liegt am Neckar.
Die Burse hat zwei Außentreppen.
Freiburg liegt in Italien.
Queen Mum wurde 190 Jahre alt.
$2 + 2 = 17$.

Dass eine Aussage entweder wahr oder falsch ist, heißt nicht, dass wir auch wissen oder entscheiden können, ob sie wahr oder falsch ist. So ist

Queen Mum wurde an einem Sonntag geboren.

eine Aussage, unabhängig davon, ob wir wissen, an was für einem Wochentag Queen Mum geboren wurde.

Es gibt auch Aussagen, bei denen wir prinzipiell nicht in der Lage sind, festzustellen, ob sie wahr oder falsch sind, z. B.

Als Aristoteles geboren wurde, regnete es in Athen.

„wahr“ und „falsch“ nennt man in der Aussagenlogik *Wahrheitswerte*. Die Annahme, dass Aussagen nur diese beiden Wahrheitswerte haben können, kennzeichnet die sogenannte *klassische Logik*. Es gibt auch andere, nichtklassische Logiken, in dieser Vorlesung werden wir jedoch nur die klassische Logik behandeln.

Aus dem Gesagten folgt, dass folgende Sätze keine Aussagen sind:

An welchem Fluss liegt Tübingen?
Wann ist endlich Pause?
Schreiben Sie bitte etwas deutlicher!
Halt!
Schneuf!
$2 + 2$
ruojf sddfjkfj sdfb dfjkgfd gsdf kgjsdf ghiosdf giorfg

Es gibt durchaus auch Sätze in unserer natürlichen Sprache, bei denen es schwierig ist, zu entscheiden, ob diese Aussagen sind oder nicht. Über den Begriff der Aussage im Allgemeinen und dieses Problem im Besonderen gibt es lange und tiefgehende Erörterungen. Wir wollen aus zwei Gründen auf dieses Thema hier nicht weiter eingehen. Der erste Grund ist, dass wir aus unserem Sprachgebrauch heraus eine gewisse Vorstellung davon haben, was eine Aussage ist, und diese reicht für unsere Zwecke zunächst vollkommen aus.

Der zweite und entscheidende Grund ist, dass die formale Logik zu künstlichen (sog. formalen) Sprachen übergeht, gerade weil das genannte Problem (und viele andere) auftauchen, wenn wir mit natürlichen Sprachen arbeiten. Durch die Verwendung *formaler Sprachen* lässt sich dies vermeiden.

Da die Einführung formaler Sprachen ein relativ großer – und für viele vielleicht gewöhnungsbedürftiger – Abstraktionsschritt ist, wollen wir dies erst an späterer Stelle tun und zunächst mit unserer natürlichen Sprache und unserer intuitiven Vorstellung davon, was Aussagen sind, weiterarbeiten.

2.2 Junktoren

Wie wir bereits erwähnt haben, betrachtet man in der Aussagenlogik die Verbindung von Aussagen zu neuen, komplexeren Aussagen. Wenn A und B für zwei Aussagen stehen, so können wir beispielsweise die Aussagen „A oder B“, „A und B“ oder „Wenn A, dann B“ bilden. Uns interessiert dabei, wie der Wahrheitswert der neuen, verknüpften Aussage von den Wahrheitswerten der einzelnen Teilaussagen abhängt.
Als Beipiel betrachten wir die Aussage „Tübingen liegt am Neckar“ und die Aussage „Torsten steht nie vor 11 Uhr morgens auf“. Dann können wir die verbundene Aussage

Tübingen liegt am Neckar oder Torsten steht nie vor 11 Uhr morgens auf.

betrachten und feststellen, dass diese wahr ist, ohne dass wir damit den Dozenten dieser Vorlesung auf irgendeine Weise kompromittieren. Denn das Wort „oder“ ist in der Logik so erklärt, dass die Aussage „A oder B“ wahr ist, falls eine der beiden Aussagen A oder B wahr ist, dabei ist der Wahrheitswert der anderen Aussage egal.
Die Worte, mit denen wir Aussagen verknüpfen (also z. B. „und“, „oder“, „wenn ... dann“), nennt man *Junktoren*. Der Begriff kommt vom lateinischen Verb „jungere“ was „verbinden“ oder „verknüpfen“ bedeutet.
In der Aussagenlogik werden nur solche Junktoren betrachtet, bei denen der Wahrheitswert der verknüpften Aussage nur von den Wahrheitswerten der Teilaussagen abhängt. So ist die Aussage „A und B“ wahr, falls A und B beide wahr sind, und andernfalls ist sie falsch. Dabei spielt es keine Rolle, für welche konkreten Aussagen A bzw. B stehen, allein ihr Wahrheitswert ist relevant.
In unserer natürlichen Sprache gibt es auch Verbindungen von Aussagen, bei denen der Wahrheitswert der verbundenen Aussage nicht allein von denen der Teilaussagen abhängt. Betrachten wir die Aussage

> Weil die Anzahl der Störche in Mitteleuropa in den letzten Jahren zurückgegangen ist, werden in Deutschland weniger Kinder geboren als Mitte des vergangenen Jahrhunderts.

Beide Teilaussagen sind wahr, für den Wahrheitswert der Aussage insgesamt bedeutet dies aber noch nichts.
Auch der Wahrheitswert von Aussagen des Typs „Es ist notwendig, dass A“ oder „Es ist möglich, dass A“ hängt nicht allein vom Wahrheitswert der Aussage A ab.
Junktoren, bei denen der Wahrheitswert der verknüpften Aussage allein von den Wahrheitswerten der Teilaussagen abhängt, heißen *extensionale Junktoren*. Nur diese werden in der Aussagenlogik betrachtet.
Da es nur auf die Wahrheitswerte der Teilaussagen ankommt, und nicht auf die konkreten Aussagen selbst, benutzen wir *Variable* für Aussagen. Diese können die Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ annehmen.
Wir geben nun eine Reihe von Junktoren an und erklären, wie sie gebraucht werden.

2.2.1 Die Negation

Beginnen wir mit dem Junktor „nicht“. Wenn wir ihn einer Aussage voranstellen, so wird diese verneint. Das heißt „nicht A“ ist falsch, wenn A wahr ist, und wahr, wenn A falsch ist. Dabei ist es – wie schon mehrfach betont – völlig egal, für welche Aussage A steht, es kommt nur auf den Wahrheitswert von A an.
Es folgt, dass in der Logik die doppelt verneinte Aussage „nicht nicht A“ denselben Wahrheitswert wie A hat. In unserer Umgangssprache ist dies nicht immer der Fall, so meinen wir mit „nicht unüblich“ nicht unbedingt dasselbe wie mit „üblich“.
In Dialekten bedeutet die doppelte Verneinung oftmals auch nur eine Verstärkung der Verneinung. Aus *Carsten Kurator* von Th. Storm stammt der Satz

> Was zu einem Esel geboren ist, das wird sein Tag nicht kein Pferd. [1]

Um Unklarheiten zu vermeiden, muss folglich bei jedem Junktor definiert werden, wie er gebraucht werden soll. Man macht das in der Aussagenlogik mit *Wahrheitstafeln*.

[1] zitiert nach Felgner [2, Seite 4].

Die Wahrheitstafel für die Negation geben wir nun an. Dabei benutzt man als Abkürzung für die Wahrheitswerte „w“ und „f“. Das Symbol für die Negation ist $\neg$.

A	¬ A
w	f
f	w

2.2.2 Die Konjunktion

Wir kommen nun zum Junktor „und“, der als Zeichen $\wedge$ erhält. Seine Wahrheitstafel sieht wie folgt aus:

A	B	A ∧ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Man sieht, dass die Konjunktion kommutativ ist, d. h. $\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}$ hat dieselbe Wahrheitstafel wie $\mathsf{B} \wedge \mathsf{A}$. In unserer natürlichen Sprache ist dies nicht immer der Fall, z. B. hat die Aussage

> Er stieg aufs Fahrrad und es begann zu regnen.

evtl. einen anderen Wahrheitswert als die Aussage

> Es begann zu regnen und er stieg aufs Fahrrad.

2.2.3 Die Disjunktion

In unserer natürlichen Sprache gibt es zwei verschiedene Bedeutungen der Wortes „oder“. Es wird im ausschließenden Sinne und im nicht–ausschießenden Sinne gebraucht. Wenn wir also die Wahrheitstafel für das „oder“ aufstellen wollen, müssen wir uns für eine Bedeutung entscheiden.
Das „oder“ im nicht–ausschließenden Sinn ist beispielsweise gemeint, wenn im Studienplan steht:

> Das Latinum oder das Graecum ist spätestens bis zur Zwischenprüfung nachzuweisen.

Wenn Sie nachweisen, dass sie sowohl das Latinum als auch das Graecum gemacht haben, werden Sie trotzdem zur Zwischenprüfung zugelassen.
Wenn Sie dagegen im Restaurant das Menü bestellt haben und der Ober fragt Sie:

> Möchten Sie als Vorspeise den Lachs oder die Gänseleberpastete?

so meint er das „oder" im ausschließenden Sinn und wäre wohl nicht damit einverstanden, wenn Sie beides ordern. Diese Bedeutung von „oder" wird im Deutschen genauer durch „entweder ... oder" wiedergegeben.
In der Logik wird der Junktor „oder" grundsätzlich im nicht–ausschließenden Sinn gebraucht. Er wird als *Disjunktion* bezeichnet und mit dem Zeichen $\vee$ symbolisiert.
Seine Wahrheitstafel ist:

A	B	A $\vee$ B
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Das ausschließende „oder" nennt man *Kontravalenz* oder *Alternative* und diese bekommt das Zeichen $>\!\!-\!\!<$. Ihre Wahrheitstafel unterscheidet sich von der der Disjunktion in der ersten Zeile.

A	B	A $>\!\!-\!\!<$ B
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

2.2.4 Die Implikation

Die Implikation gibt man in der Umgangssprache durch „wenn ..., dann"–Sätze wieder, z.B.

> Wenn Peter ein Kochbuch geschenkt bekommt, dann geht er nie mehr in die Mensa.

Man benutzt eine solche Konstruktion im Allgemeinen allerdings nur, wenn ein inhaltlicher Zusammenhang zwischen den beiden Teilaussagen besteht. Den Satz

> Wenn Tübingen an der Seine liegt, dann sind Hunde Säugetiere.

würde man als unsinnig bezeichnen.
In der Logik können wir diesen Standpunkt keinesfalls vertreten. Denn wir haben gesagt, dass wir nur Junktoren betrachten, bei denen der Wahrheitswert der verknüpften Aussage ausschließlich von den Wahrheitswerten der Teilaussagen abhängt. Andere Gesichtspunkte dürfen keine Rolle spielen. Folglich müssen wir die Implikation so definieren, dass diese Anforderung erfüllt ist.
Legen wir zunächst die natürlche Sprache zugrunde. Wenn wir den Satz

> Wenn Peter ein Kochbuch geschenkt bekommt, dann geht er nie mehr in die Mensa.

betrachten, so würden wir ihn für richtig halten, falls beide Teilaussagen wahr sind. Wir würden sagen, er ist falsch, falls Peter ein Kochbuch geschenkt bekommt und weiterhin in die Mensa geht. Wenn er jedoch keines geschenkt bekommt (d. h. die erste Aussage falsch ist), können wir über den Wahrheitswert der Implikation nichts aussagen, egal wie der Wahrheitswert der zweiten Aussage ist, d. h. ob er weiter in die Mensa geht oder nicht.
Wir müssen aber auch in diesen beiden Fällen den Wahrheitswert der Implikation als Junktor erklären. Wir definieren diese dann als wahr.

A	B	A → B
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die Implikation $\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}$ ist also stets wahr, falls A falsch ist, unabhängig vom Wahrheitswert von B. Aus der Scholastik stammt für diesen Sachverhalt die Umschreibung „ex falso quodlibet“.