5. Übung
Teilbarkeitsregeln

Präsenzübungen (für 21.11./22.11./23.11)

1. Bei einer vierstelligen, durch 37 teilbaren Zahl multipliziert man die Differenz aus der Hunderter- und der Zehnerziffer mit 26, addiert die Tausender- und die Einerziffer und subtrahiert die Zehnerziffer. Das Ergebnis ist wieder durch 37 teilbar.
   a. Testen Sie diesen Rechentrick an Beispielen.
   b. Begründen Sie den Rechentrick.
   c. Entwickeln Sie ähnliche Verblüffungstricks.

2. Bildet man zu einer Zahl die Quersumme, dann von dieser Quersumme die Quersumme u.s.w. bis man eine einstellige Zahl erreicht hat, so ist diese letzte Zahl der 9er-Rest der ursprünglichen Zahl.
   a. Testen Sie das an der Zahl 589656 und weiteren Beispielen
   b. Begründen Sie das.

Hausübungen (Abgabe: Do, 24.11.)

3. Teilbarkeit durch 6
   a. Entwickeln Sie für 6 eine Teilbarkeitsregel über die gewichtete Quersumme. Testen Sie mit dieser Regel, ob n = 158234 durch 6 teilbar ist. Bestimmen Sie nun (möglichst bequem) den Rest von n beim Teilen durch 6.
   b. „ Man bildet von einer Zahl die Quersumme ohne die letzte Ziffer, verdoppelt das Ergebnis und zieht die letzte Ziffer ab. Ist das Ergebnis durch 6 teilbar, so ist auch die Ausgangszahl durch 6 teilbar.“ Erläutern Sie diese Regel und stellen Sie den Zusammenhang zur Regel über die gewichtete Quersumme her.

4. Teilbarkeit durch 7
   Entwickeln Sie für 7 eine Teilbarkeitsregel über die gewichtete Quersumme. Berücksichtigen Sie auch negative Gewichtszahlen, um ihr eine möglichst einfache, griffige Form zu geben.
   Testen Sie anschließend Ihre Regel an wenigstens 3 Beispielen.

5. „In einer Kongruenz darf man eine Zahl durch eine kongruente Zahl ersetzen.“
   Genauer: $a \cdot b \equiv c \bmod m$ und $b \equiv d \bmod m \Rightarrow a \cdot d \equiv c \bmod m$
   Beweisen Sie diese Gesetzmäßigkeit.

6. Wiederholung zur Logik, Klausuraufgabe vom letzten Jahr
   Wir betrachten Spielmarken, die auf der einen Seite einen Buchstaben haben und auf der anderen Seite eine Ziffer. Welche der gezeigten Spielmarken müssen Sie umdrehen, um zu testen, ob sie der Regel entsprechen: „Wenn der Buchstabe A oder B ist, dann ist die Ziffer keine 5“. Was muss dann die andere Seite zeigen?

   A B C 3 5

7. Extraaufgabe
   $\forall a, m \in \mathbb{N}\ \exists x, y \in \mathbb{N}$ mit $a^{x+y} \equiv a^x \bmod m$
   a) Interpretieren und erläutern Sie die Aussage.
   b) Begründen Sie die Aussage.