11. Übung
Kombinatorik, Urnenmodell

Präsenzübungen (für 23.1./24.1./25.1.)

1.
   a. Welche Auswirkungen haben die Unterscheidungen „mit - ohne Zurücklegen" und „mit - ohne Berücksichtigung der Reihenfolge" auf die Anzahl der Möglichkeiten?
   b. Begründen Sie damit, welche Zahl für jedes $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}_0$ am größten, am kleinsten und zwischen diesen Extremen sein muss: $\binom{n}{k}, \binom{n+k-1}{k}, n^k$ oder $\frac{n!}{(n-k)!}$
   c. Welche Zahlen lassen sich schwer vergleichen? Warum ist das so?

2. Wir hatten in der Vorlesung an einem Beispiel gesehen, dass $\frac{n^k}{k!}$ keine natürliche Zahl sein muss. Suchen Sie zu k = 8
   a. die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$
   b. eine weitere Zahl $n \in \mathbb{N}$,

   so dass doch $\frac{n^k}{k!}$ eine natürliche Zahl ist.

Hausübungen (Abgabe: Do, 26.1.)

3. Eine andere Annäherung an die Permutationsregel.
   Wir nennen die Anzahl der Permutationen von *n* verschiedenen Dingen *P*(*n*) [und wissen noch **nicht**, dass das *n*! ist]
   a. Wir nehmen **eine** (beliebige) Anordnung von 5 Dingen und fügen ein 6. Ding hinzu. Auf wie viele Arten geht das?
   b. Wenn *P*(5) die Anzahl aller Anordnungen von 5 verschiedenen Dingen ist, wie groß muss dann *P*(6) in Bezug auf *P*(5) sein?
   c. Wie groß ist dann allgemein *P*(*n*) in Bezug auf *P*(*n*-1)? Erläutern Sie kurz.
   d. Nun können Sie schrittweise zurückgehen: *P*(*n*-1) in Bezug auf *P*(*n*-2), *P*(*n*-2) in Bezug auf *P*(*n*-3) u.s.w. und dann alles geschickt ineinander einsetzen, so dass am Ende eine bekannte Formel für *P*(*n*) entsteht.

4. (eine Fleißaufgabe)
   a. Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, mit denen man k = 4 Zahlen aus n = 4 ziehen kann, wobei die gezogene Zahl wieder zurückgelegt wird und bei den Ergebnissen die Reihenfolge nicht beachtet wird.
   b. Schreiben Sie alle Möglichkeiten in einer Liste auf.

c. Schreiben Sie hinter die einzelnen Elemente der Liste aus b) die Anzahl der möglichen Vertauschungen.
z.B. {1, 2, 3, 3}   12
(da es 12 Vertauschungen (Permutationen) von 4 verschiedenen Dingen, davon 2 gleich, gibt)
d. Zählen Sie die Anzahl der Permutationen in c) zusammen. Welche Zahl haben Sie nun bestimmt? Prüfen Sie kritisch und äußern Sie sich sinnvoll.

5. Bei einem Kartenspiel gibt es 60 verschiedene Karten. Jeder der 3 Mitspieler bekommt 6 Karten, die restlichen 42 Karten kommen als Stapel in die Mitte. Bei der Frage, wie viele Kartenverteilungen es gibt, erhalten Sie als Lösung
   1. $\binom{60}{6} \cdot \binom{54}{6} \cdot \binom{48}{6}$
   2. $\dfrac{60!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 42!}$
   3. $\binom{60}{18} \cdot \left[\binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6} \cdot \binom{6}{6} \right]$

b. Interpretieren Sie die drei Lösungsansätze in ihrem kombinatorischen Grundverständnis
c. Zeigen Sie durch passende Umformungen, dass alle drei Ergebnisse gleich sind.

6. Zeigen Sie durch passende Umformungen, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$ gilt:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

7. *Extraaufgabe, getrennt bei Herrn Albers abzugeben*
Auf einem Kreis liegen n Punkte. Jeder Punkt ist mit jedem verbunden. (Dann gibt es $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ Verbindungsstrecken.) Die Punkte liegen so (unregelmäßig), dass sich nie drei oder mehr Verbindungsstrecken in einem Punkt schneiden. Wie viele Schnittpunkte gibt es dann?