Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 05/06

Übung 8, Lösungsskizzen

1. Man versucht, eine Potenz mit kleinem Rest zu berechnen und macht mit der „große" Sprünge.

Potenz	3^1	3^2	3^3	3^4	3^8	3^{12}	$3^{24}=(3^4)^6$
Rest mod 79	3	9	27	$81\equiv 2$	4	8	$2^6=64$

nun zerlegt man $78 = 3\cdot 24 + 6$

also $3^{78} = (3^{24})^3 \cdot 3^4 \cdot 3^2 \equiv 64^3 \cdot 2 \cdot 9 \mod 79$

$\equiv 4718592 \mod 79$

$\equiv 1 \mod 79$

Da 79 eine Primzahl ist, ist dieses Ergebnis nach dem kleinen Satz von Fermat zu erwarten.

2. a) $\exists a \in \{1,2,3,\ldots,p-1\}$ mit $a^{p-1} \not\equiv 1 \mod p$
$\Rightarrow$ p ist keine Primzahl

b) Nach dem kleinen Satz von Fermat muss $x=1$ sein.

c) Da es nur ein Test ist, ist es offen, ob p eine Primzahl ist oder nicht.

d) $x=5$ erfüllt die Voraussetzung für die Kontraposition des kleinen Satzes von Fermat. Also ist p mit Sicherheit keine Primzahl

Hausübungen

3. a) FALSCH Der Laufindex kann nicht i^2 sein. Auch die obere Grenze n^2 ist falsch

b) RICHTIG Die einzelnen Quadratzahlen werden multipliziert

c) FALSCH Der Laufindex und die obere Grenze dürfen nicht beide n lauten

d) FALSCH Der Laufindex heißt k, der Term wird mit i gebildet. Ergebnis wäre i^{2n}

e) FALSCH Die obere Grenze ist nicht n^2. Ergebnis wäre $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n^2 = (n^2)!$

f) Richtig

4. a. In $\mathbb{N}$ kann man 6 zerlegen in $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$
Da $2 \notin D$, bleibt in D nur $6 = 1 \cdot 6$. Also ist 6 in D Primzahl.

b. prim in D sind 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 42, 48,

c. „$\Rightarrow$" $9 \mid d \Rightarrow d = 9 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow d = 3 \cdot (3k)$ Sowohl 3 als auch $3 \cdot k$ sind Elemente von D.

$\Rightarrow$ d hat in D mehr als 2 Teiler

$\Rightarrow$ d ist in D keine Primzahl

„$\Leftarrow$" d ist in D keine Primzahl

$\Rightarrow$ Es gibt zwei Zahlen $d_1, d_2 \neq 1$ und $\neq d$ mit $d_1 \cdot d_2 = d$, $d_1, d_2 \in D$

$\Rightarrow d_1 = 3 \cdot q_1$ und $d_2 = 3 \cdot q_2$ mit $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$

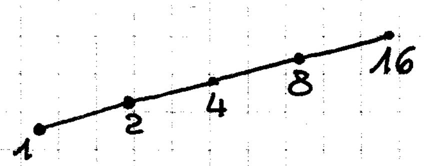
$\Rightarrow d = d_1 \cdot d_2 = 3 \cdot q_1 \cdot 3 \cdot q_2 = 9\, q_1 q_2$

$\Rightarrow 9 \mid d$

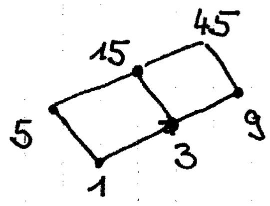
d. $108 = 9 \cdot 12 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = \cancel{18 \cdot 6}\ 3 \cdot 6 \cdot 6$
$= 3 \cdot 3 \cdot 12$

Beides sind PFZ (siehe b.)

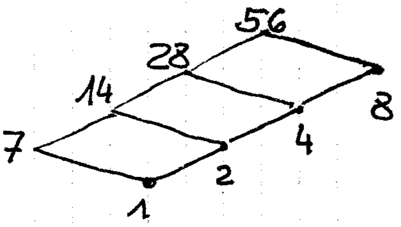
5 a. $16 = 2^4$ $\quad T_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$



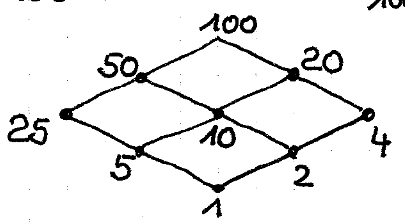
5 b. $45 = 3^2 \cdot 5$ $\quad T_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$



c. $56 = 2^3 \cdot 7$ $\quad T_{56} = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$



d. $100 = 2^2 \cdot 5^2$ $\quad T_{100} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$



6 a. $4! = 24 = 2^3 \cdot 3$ $\qquad 5! = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$5!$ endet mit einer Null, da einmal das Paar $2 \cdot 5 = 10$ gebildet werden kann.

b. In $a = 2^{24} \cdot 5^{20} \cdot \ldots$ können 20 Paare $2 \cdot 5 = 10$ gebildet werden. Folglich muss das Ergebnis am Ende 20 Nullen haben

7. Analog zu Aufg 1

Potenzen von 3	3^1	3^2	3^3	3^4	3^6
Rest mod 91	3	9	27	$81 \equiv -10$	$-90 \equiv +1$

also $3^{90} = (3^6)^{15} \equiv 1 \mod 91$

Potenzen von 4	4^1	4^2	$4^3 \ldots$	4^6
Rest mod 91	4	16	$64 \ldots$	$4096 \equiv 1$

also $4^{90} = (4^6)^{15} \equiv 1 \mod 91$

Potenzen von 9 siehe Potenzen von 3

~~Rest mod 91~~ Wegen $3^6 = (3^2)^3 = 9^3 \equiv 1 \mod 91$

gilt $9^{90} = (9^3)^{30} \equiv 1 \mod 91$

Damit hat man 3 Zahlen gefunden, die den Primzahltest mit dem kleinen Satz von Fermat bestehen. Trotzdem ist $91 = 7 \cdot 13$ natürlich keine Primzahl.

8. In der Sächsischen Zeitung vom 17. Mai 2005 wurden Lisa Sauermann und Lisa Hutschenreiter, welche in der Bundesrunde in der Olympiadeklasse 8 nach Bertram Arnhold einen ersten Preis erhielten, vorgestellt. Nebenbei wurden den Lesern eine der Olympiadeaufgaben, nämlich Aufgabe 440844, als Test gestellt. Über 70 Zuschriften mit großteils richtigen Lösungen wurden zugesandt. Eine davon wurde doppelt eingesandt: Als normaler Text und lyrisch, sinnigerweise in 9 Versen zu je vier Zeilen. Um zu zeigen, welche Begeisterung die Olympiadeaufgaben auch außerhalb der Matheolympiade auslösen, sei hier die lyrische Lösung abgedruckt.

Die geheimnisvolle 36

von Lutz Behnke

Nimm Dir Zahlen – derer zwei –,
die beide prim und größer drei.
Doch finde solche nur geschwind,
die grad' um zwei verschieden sind.

Dieselben nenne p und q.
Nimm ihr Produkt, plus 1 dazu!
Hast Du berechnet dieses fleißig,
ist's teilbar durch die 36.

Warum gilt solches? – ist die Frage.
Die Antwort kommt recht leicht zutage,
wenn Du in Mathe aufgepasst
und nicht am Fleiß gesparet hast.

Dies p mal q, ganz einerlei,
schreibt sich als p mal $(p+2)$,
welchselbiges – das tut nicht weh –
ist p Quadrat plus zweimal p.

Da eine Eins noch zu addieren,
muss keiner sich dafür genieren,
der dank Binomscher Formel hat:
$p+1$, dies zum Quadrat.

Da p ja eine Primzahl war,
ist $p+1$ gerade – klar!
Drum $(p+1)$ – dies zum Quadrat
man rasch durch 4 geteilet hat.

Die 3 teilt p nicht, auch nicht q,
und darum trifft das gleiche zu
auf q minus 3, das man
p minus 1 auch schreiben kann.

Doch ist ja jede dritte Zahl
durch 3 teilbar ohne Qual,
und bleibt für $p+1$ sodann,
dass man durch 3 es teilen kann.

Es folgt, dass $(p+1)$ quadrat
auch zum Teiler 9 noch hat,
und ist, was zu beweisen war,
teilbar durch 36 gar.