Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 05/06

Übung 6. Lösungsskizzen

1.

2er	4er	8er	16er
10110110	2312	266	B6
111100001	13201	741	1E1
1100111	1213	147	67
10101100	2230	254	AC

2 a) Ansatz: $53 = 1\cdot b^2 + 2\cdot b + 5$

quadratische Gleichung $b^2 + 2b - 48 = 0$

Lösungen $\underline{\underline{b = 6}}$ oder $\underbrace{b = -8}_{\text{nicht sinnvoll}}$

Probe: $36 + 2\cdot 6 + 5 = 53$ ✓

b) Ansatz: $177 = 1\cdot b^3 + 2b^2 + 2$

Kubische Gleichung $b^3 + 2b^2 = 175$

Lösung durch geschicktes Probieren, problemorientiert.

$b \geq 2$ also darf b^3 nicht über 175 liegen

$\Rightarrow b \leq \sqrt[3]{175} \approx 5{,}59 \qquad b \leq 5$

Wegen $1\cdot b^3$ passt b^3 nicht zwei Mal in 175

also $2b^3 \geq 175 \Rightarrow b^3 > 87 \Rightarrow b > \sqrt[3]{87} \approx 4{,}43$

Also muss $b = 5$ sein und es kann keine weitere Lösung geben

Probe: $1\cdot 5^3 + 2\cdot 5^2 + 2 = 125 + 50 + 2 = 177$

3a) $12345_{18} > DFC9_{18}$ Bei gleicher Basis ist die Zahl mit mehr Stellen größer.

b) $121212_7 < 121212_8$ Bei gleichen Ziffern ist die Zahl zur größeren Basis größer.

c) $\underset{\text{nach b)}}{BA5_{12} < BA5_{16}} \underset{\text{nach a)}}{<} AC84_{16}$

d) Nach Aufg 1 sind 2 Stellen im 3-er-System eine Stelle im 9er-System.
Also ist $12'21'22_3$ im 9er-System 3stellig mit $12_3 = 5_9$ als höchste Stelle. Also $122122_3 > 122_9$

Hausübungen

4. $g_3 = 14 \Rightarrow 10^3 \equiv 14 \mod m \Rightarrow 1000 - 14 = 986 = k_1 \cdot m$

$g_4 = 4 \Rightarrow 10^4 \equiv 4 \mod m \Rightarrow 10000 - 4 = 9996 = k_2 \cdot m$

Das gesuchte m ist also Teiler von 986 und 9996

$986 = 2 \cdot 17 \cdot 29 \qquad 9996 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 17$

Man sieht, dass $m = 17$ eine und $m = 34$ eine weitere Lösung ist.

5.
$$\begin{aligned} 12547 &= 2509 \cdot 5 + 2 \\ 2509 &= 501 \cdot 5 + 4 \\ 501 &= 100 \cdot 5 + 1 \\ 100 &= 20 \cdot 5 + 0 \\ 20 &= 4 \cdot 5 + 0 \\ 4 &= \underline{\underline{0}} \cdot 5 + 4 \end{aligned}$$

STOP

Also $12547_{10} = 400142_5$

6. a)
$$\begin{array}{r} 8734 \\ +\ 5285 \\ \hline 12A09_{11} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 11532 \\ +\ 6990 \\ \hline 18522_{10} \end{array} \quad \checkmark$$

b)
$$\begin{array}{r} 3213 \\ -\ 2131 \\ \hline 1022_4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 231 \\ -\ 157 \\ \hline 74_{10} \end{array} \quad \checkmark$$

c)
$$\begin{array}{r} 142 \cdot 302_5 \\ \hline 1031 \\ 334 \\ \hline 103434_5 \end{array} \quad \rightarrow \quad 47 \cdot 77 = 3619 \checkmark$$

d.

$\cdot 5_6$	1	2	3	4	5
	5	14	23	32	41

$12124 : 5_6 = 1352_6 \quad \rightarrow \quad 1780 : 5 = 356$ ✓

$$\begin{array}{l} 12124 \\ \underline{5} \\ 31 \\ \underline{23} \\ 42 \\ \underline{41} \\ 14 \\ \underline{14} \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{r} 3421 \\ +\ 1452 \\ \hline a073 \end{array}$$

3. Stelle: $4_b + 4_b = 10_b \Rightarrow b = 8$
$= 1 \cdot b$

Dann ist die Ziffer a wegen des Übertrags
$a = 5$

8. a. $1,5,7 \rightarrow$
$$\begin{array}{r} 751 \\ -\ 157 \\ \hline 594 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 954 \\ -\ 459 \\ \hline 495 \end{array}$$

b. 9er-System $1,5,7$

$$\begin{array}{r} 751 \\ -\ 157_9 \\ \hline 583 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 853 \\ -\ 358_9 \\ \hline 484 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 844 \\ -\ 448 \\ \hline 385 \end{array}$$

$2,2,3:$
$$\begin{array}{r} 322 \\ -\ 223_9 \\ \hline 088 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 880 \\ -\ 088_9 \\ \hline 781 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 871 \\ -\ 178_9 \\ \hline 682 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 862 \\ -\ 268_9 \\ \hline 583 \end{array} \quad \text{s.o.}$$

Vermutung: Die Rechnung läuft auf den Zyklus
$484_9 \leftrightarrow 385_9$ zu.

8er-System: $1,5,7$

$$\begin{array}{r} 751 \\ -\ 157_8 \\ \hline 572 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 752 \\ -\ 257_8 \\ \hline 473 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 743 \\ -\ 347_8 \\ \hline 374 \end{array}$$

„Fixpunkt"

7er-System 3, 3, 6

$$\begin{array}{r} 633 \\ -\ 336_7 \\ \hline 264 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 642 \\ 246_7 \\ \hline 363 \end{array}$$

Zweierzyklus

c) Die Experimente lassen folgende Vermutungen zu:
Ist b gerade (siehe $b=10$, $b=8$) so hat der Prozess einen Fixpunkt, der durch die drei Ziffern $b-1$, $\frac{b}{2}$, $\frac{b}{2}-1$ gebildet wird.
Ist b ungerade (siehe $b=9$, $b=7$) so läuft der Prozess in einen Zweierzyklus. Die beiden Zahlen werden gebildet aus $b-1$, $\frac{b-1}{2}$, $\frac{b-1}{2}$ und $b-1$, $\frac{b+1}{2}$, $\frac{b-3}{2}$

Die Ergebnisse der Differenz haben immer die Form $\underbrace{a \quad b-1 \quad b-1-a}_{\text{Diese 3 Ziffern an diesen Positionen}}$, $0 \leq a < b$, $a \in N$

Die Ergebnisse der Differenz haben stets die
- Quersumme $2 \cdot (b-1)$ $\Rightarrow$ sie sind durch $b-1$ teilbar
- alternierende Quersumme 0 $\Rightarrow$ sie sind durch $b+1$ teilbar

$\Rightarrow$ sie sind durch $(b-1)(b+1) = b^2-1$ teilbar