Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 05/06

Übung 4, Lösungsskizzen

1. a) „ist Teiler von"

Reflexivität: a ist Teiler von a stimmt

Symmetrie: $a|b \Rightarrow b|a$ stimmt nicht, denn

$2|12$ aber $12 \nmid 2$

Transitivität: $a|b$ und $b|c \Rightarrow a|c$ stimmt

denn $\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = k_a \cdot a \\ b|c \Rightarrow c = k_b \cdot b \end{array}\right\} c = k_b \cdot k_a \cdot a \Rightarrow a|c$

Also ist „ist Teiler von" <u>keine</u> Äquivalenzrelation

b) „a AGP b"

Reflexivität: a AGP a stimmt

Symmetrie: a AGP b $\Rightarrow$ b AGP a stimmt

Wenn a mit b Aufgaben abgibt, dann auch b mit a.

Transitivität: a AGP b und b AGP c $\Rightarrow$ a AGP c stimmt

Wenn a mit b Aufgaben abgibt und b mit c, dann muss auch a mit c Aufgaben abgeben

Also ist „ist AGP von" eine Äquivalenzrelation.

c) „a GP b"

Reflexivität: a GP a stimmt

Symmetrie: a GP b $\Rightarrow$ b GP a stimmt

Wenn a mit b in einer Arbeitsgruppe ist, ist auch b mit a in einer

Transitivität: a GP b und b GP c $\Rightarrow$ a GP c

muss nicht stimmen. Denn die Arbeits-

Fortsetzung | gruppen in denen a und b sind ~~mit~~ und b und c müssen nicht übereinstimmen. Dann müssen a und c nicht in einer Arbeitsgruppe sein.

2. a) $3^2 = 9 \equiv x \bmod 7 \qquad x = 2$

b) $3^2 \equiv 2 \bmod 7$ quadrieren

$(3^2)^2 = 3^4 \equiv 4 \bmod 7$ Probe: $3^4 = 81 = 11 \cdot 7 + 4$

c) $7^2 = 49 \equiv 5 \bmod 11 \qquad x_2 = 5$

$7^3 = 7^2 \cdot 7 \equiv 5 \cdot 7 \bmod 11 \equiv 2 \bmod 11 \qquad x_3 = 2$

$7^4 = (7^2)^2 \equiv 25 \equiv 3 \bmod 11 \qquad x_4 = 3$

$7^5 = 7^3 \cdot 7^2 \equiv 2 \cdot 5 \equiv 10 \bmod 11 \qquad x_5 = 10$

$7^6 = 7^3 \cdot 7^3 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 \bmod 11 \qquad x_6 = 4$

$7^7 = 7^3 \cdot 7^4 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \bmod 11 \qquad x_7 = 6$

$7^8 = 7^4 \cdot 7^4 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \bmod 11 \qquad x_8 = 9$

$7^9 = 7^6 \cdot 7^3 \equiv 4 \cdot 2 \equiv 8 \bmod 11 \qquad x_9 = 8$

$7^{10} = 7^7 \cdot 7^3 \equiv 6 \cdot 2 \equiv 1 \bmod 11 \qquad x_{10} = 1$

Nun wiederholt sich die Rechnung periodisch, da man immer $7^{10} \equiv 1 \bmod 11$ abspalten kann

Beispiel $7^{13} = 7^{10} \cdot 7^3 \equiv 1 \cdot 7^3 \bmod 11$

Also: $x_1 = 7 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 3 \quad x_5 = 10 \quad \ldots\ldots$

$= x_{11} \quad = x_{12} \quad = x_{13} \quad = x_{14} \quad = x_{15}$

$= x_{21} \quad = x_{22} \quad \ldots\ldots\ldots$

$\ldots \quad \ldots$

d) Wegen c. zerlegt man $7^{603} = 7^{600} \cdot 7^3 = (7^{10})^{60} \cdot 7^3$

$\equiv 1 \cdot 7^3 \bmod 11 \equiv 2 \bmod 11$

Hausübungen

a) Verneinung: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A$ und $\neg B$

„Da hat jemand den Master und hat nicht (vorher) den Bachelor gemacht"

b) Umkehrung: „Wenn jemand den Bachelor gemacht hat, dann hat er auch den Master gemacht"

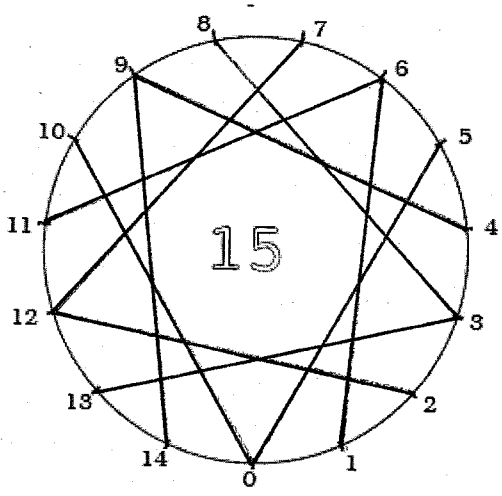
Die Umkehrung ist falsch, denn es ist sicher, dass nicht jede(r) mit bestandenem Bachelor zum Masterstudium zugelassen wird.

c) Kontraposition: „Wenn jemand keinen Bachelor hat, dann kann er auch nicht den Master machen"

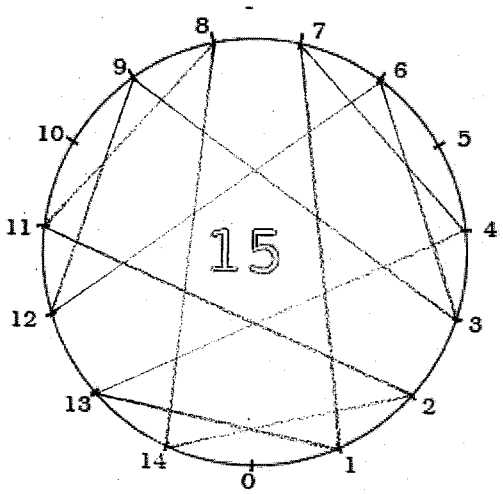
Was ganz klar signalisiert, dass (im Normalfall) der Bachelor notwendig ist für den Master. Und b) zeigt, dass der Bachelor nicht ausreicht um den Master zu machen.

---

4. a)



$f=6$



$f=7$

Bei $f=6$ ist dann das Ergebnis durch 15 teilbar, wenn der 2. Faktor durch 5 teilbar ist.

~~Bei~~ $f=7$ hat mit 15 keinen gemeinsamen Teiler, folglich kann das Produkt nicht durch 15 teilbar sein.

b) Nach Aufgabe a) ist $\bar{6}$ ein Nullteiler von R_{15}, denn $\bar{6} \cdot \bar{5} = \bar{0}$ (und auch $\bar{6} \cdot \bar{10} = \bar{0}$)
Da $15 = 3 \cdot 5$ sind alle Restklassen Nullteiler, die ein Vielfaches von 3 oder 5 als Repräsentant haben. Also

$\bar{3}$, denn $\bar{3} \cdot \bar{5} = \bar{0}$ $\quad$ $\bar{9}$, denn $\bar{9} \cdot \bar{5} = \bar{0}$

$\bar{6}$, denn $\bar{6} \cdot \bar{5} = \bar{0}$ $\quad$ $\bar{12}$, denn $\bar{12} \cdot \bar{5} = \bar{0}$

$\bar{5}$, denn $\bar{5} \cdot \bar{3} = \bar{0}$ $\quad$ $\bar{10}$, denn $\bar{10} \cdot \bar{3} = \bar{0}$

Einer der Repräsentanten liefert den Faktor 3, der andere den Faktor 5. Enthält ein Repräsentant weder 3 noch 5 als Faktor, kann er kein Nullteiler sein.
Die ganz sichere Probe erhält man durch die vollständige Multiplikationstabelle von R_{15}.

5. A: Beweis über die Definition der Kongruenz.

Voraus: $a+b \equiv c \bmod m \iff a+b-c = k_1 m,\ k_1 \in \mathbb{Z}$

$b \equiv d \bmod m \iff b-d = k_2 m,\ k_2 \in \mathbb{Z}$

$\iff d = b - k_2 m$

Behauptung: $a+d \equiv c \bmod m \iff a+d-c = k_3 m,\ k_3 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a+d-c &= a + (b - k_2 m) - c \quad \text{(umordnen)} \\ &= \underbrace{a+b-c}_{\text{s.o.}} - k_2 m \\ &= k_1 m - k_2 m \quad \text{(ausklammern)} \\ &= \underbrace{(k_1 - k_2)}_{\text{umbenennen}} m \\ &= k_3 m \end{aligned}$$

q.e.d.

B: Beweis durch Rechnen mit Kongruenzen

Voraus: $\left\{\begin{array}{l} a+b \equiv c \mod m \\ b \equiv d \mod m \end{array}\right\}$ −

$\left\{\begin{array}{l} a \equiv c-d \mod m \\ d \equiv d \mod m \end{array}\right\}$ +

$a+d \equiv c \mod m$ q.e.d.

6.

$1^4 = 1 = 0\cdot 5 + 1$ $\quad 6^4 = 1296 = 259\cdot 5 + 1$

$2^4 = 16 = 3\cdot 5 + 1$ $\quad 7^4 = 2401 = 480\cdot 5 + 1$

$3^4 = 81 = 16\cdot 5 + 1$ $\quad 8^4 = 4096 = 819\cdot 5 + 1$

$4^4 = 256 = 51\cdot 5 + 1$ $\quad 9^4 = 6561 = 1312\cdot 5 + 1$

$5^4 = 625 = 125\cdot 5 + 0$ $\quad 10^4 = 10000 = 2000\cdot 5 + 0$

Vermutung: Ist eine Zahl durch 5 teilbar, so ist es auch die 4. Potenz.

Ist eine Zahl n <u>nicht</u> durch 5 teilbar, so lässt n^4 beim Teilen durch 5 einen Rest von 1

Beweis: a) $n = 5k \Rightarrow n^4 = (5k)^4 = 5^4 \cdot k^4 = 5\cdot(5^3\cdot k^4)$

Also ist n^4 durch 5 teilbar

b) $n = 5k+1$, $k \in \mathbb{N}$ $\quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$n^4 = (5k+1)^4 = (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 1 + 6\cdot(5k)^2\cdot 1^2$

$+ 4\cdot(5k)\cdot 1^3 + 1^4$

$= 5\cdot\underbrace{(5^3k^4 + 4\cdot 5^2k^3 + 6\cdot 5k^2 + 4\cdot k)}_{\in \mathbb{N}} + 1$

also bleibt beim Teilen durch 5 ein Rest von 1

c) $n = 5k+2$

$n^4 = (5k+2)^4 = 5\cdot \overline{k}_2 + 2^4 = 5\overline{k}_2 + 16$, $\overline{k}_2 \in \mathbb{N}$

Da 16 beim Teilen durch 5 einen Rest von 1 lässt, ist dieses auch für n^4

d) $n = 5k + 3$

$n^4 = (5k+3)^4 = 5\overline{k}_3 + 3^4 = 5\overline{k}_3 + 81$, $\overline{k}_3 \in \mathbb{N}$

Da 81 beim Teilen durch 5 einen Rest von 1 lässt, ist dieses auch für n^4

e) $n = 5k + 4$

$n^4 = (5k+4)^4 = 5\overline{k}_4 + 4^4 = 5\overline{k}_4 + 256$, $\overline{k}_4 \in \mathbb{N}$

Da 256 beim Teilen durch 5 einen Rest von 1 lässt, ist dieses auch für n^4.

Die Fälle a) - e) sind eine vollständige Fallunterscheidung. Damit ist die Vermutung bewiesen.