Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 05/06

Übung 3, Lösungsskizzen

1. a)

i) A ist hinreichend für B
Denn wenn eine Zahl durch 10 teilbar ist, so ist sie auch gerade

ii) A ist hinreichend und notwendig für B
Denn wenn g zu h parallel ist, so auch umgekehrt.
Und ist g nicht zu h parallel, so ist es auch nicht h zu g.

iii) A ist notwendig für B
Man muss 50% der Punkte in den Übungsaufgaben haben um überhaupt zur Klausur zugelassen zu werden.

iv) A ist hinreichend und notwendig für B
Denn ist die Klausur im 1. Semester bestanden, so hat man die Zulassung zum 2. Semester.
Hat man die Klausur (inkl. Nachprüfungen) nicht bestanden, so erhält man auch keine Zulassung zum 2. Semester

v) A ist hinreichend für B
A bedeutet $n = 8k + 4$, $n, k \in \mathbb{N}_0$
$= 4(2k+1)$ also ist n durch 4 teilbar
Die Umkehrung gilt nicht, A ist <u>nicht</u> notwendig für B

vi) A ist notwendig für B
$\neg A$ heißt: Auf ~~der~~ einer Seite steht ein Konsonant
$\neg B$ heißt: Auf einer Seite steht gerade Zahl
Aufgabe 2 Übung 2 sagt: $\neg A \Rightarrow \neg B$

b) Wenn jemand aus ganzem Herzen sagt: „Nun reicht's aber" dann ist etwas hinreichend für etwas anderes. Z.B. Ist häufiges, verspätetes Erscheinen hinreichend für ein ernstes Gespräch mit den Eltern. Eine herausragend gute Leistung ist notwendig für eine schriftliche Erwähnung im Zeugnis.

---

2. a) In dem Beispiel sieht man, dass eine Zahl, die beim Teilen durch 3 den Rest 2 lässt, nämlich 8, plus eine Zahl, die beim Teilen durch 5 den Rest 2 lässt, nämlich 22, <u>nicht</u> eine Zahl ergibt die beim Teilen durch 8 den Rest 4 ergibt, denn 30 lässt den Rest 6.
Die Voraussetzungen sind erfüllt, trotzdem ~~gil~~ wird die Behauptung nicht erfüllt

b) Findet man (wenigstens) ein Gegenbeispiel, so ist die Aussage, die etwas für <u>alle</u> Zahlen behauptet, falsch.

c) Also ist in dem Beweis ein Fehler

richtig:
$$\begin{aligned} a &= 3n_1 + 2 \\ b &= 5n_2 + 2 \\ \hline a+b &= 3n_1 + 5n_2 + 4 \end{aligned}$$

n_1 kann von n_2 verschieden sein

d) Jetzt ist über die Teilbarkeit durch 8 keine Aussage möglich. Es ist jeder Rest möglich.

Hausübungen

3. „$\exists k \in \mathbb{N}: n = k^2$" heißt: n ist eine Quadratzahl
$\forall n \in \mathbb{N}$ übersetzt man am besten mit „beliebige natürliche Zahl"
„Wenn eine beliebige natürliche Zahl das Quadrat einer ungeraden Zahl ist, so ist sie selbst ungerade"

oder noch etwas umgangssprachlicher
„Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist auch ungerade"

4. $\forall p \in \mathbb{N}: (p \neq 2$ und p gerade $\Rightarrow p$ ist keine Primzahl$)$
Das „$\forall p \in \mathbb{N}$" wird nicht verändert, insbesondere <u>nicht</u> zu „$\exists p \in \mathbb{N}$". Die Kontraposition ist eine äquivalente Umformung, so dass alles andere unverändert bleibt.

5. a)

A	B	C	(A und B)	$\Rightarrow$ C	$\Leftrightarrow$	(A $\Rightarrow$ C)	oder	(B $\Rightarrow$ C)
w	w	w	w	w	immer wahr	w	w	w
w	w	f	w	f		f	f	f
w	f	w	f	w		w	w	w
w	f	f	f	w		f	w	w
f	w	w	f	w		w	w	w
f	w	f	f	w		w	w	f
f	f	w	f	w		w	w	w
f	f	f	f	w		w	w	w
			1.	2.	6.	3.	5.	4.

b) $(A \wedge B) \Rightarrow C$
Implikation in „nicht-oder-Form"
$\Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C$
Auflösen des $\neg$ vor der und-Klammer
$\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee C$
Verdoppeln einer Aussage i.d. oder-Kette
$\Leftrightarrow \neg A \vee C \vee \neg B \vee C$
Zweimal „nicht-oder-Form" verwandeln
$\Leftrightarrow (A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$ in Implikation

6. Man teilt $6318495 : 23846$ mit dem Rechner:
$264{,}970\ldots$ Folglich ist $264 = k$
Nun multipliziert man: $264 \cdot 23846 = 6295344$
Und Subtrahiert $6318495 - 6295344 = 23151$
Also $r = 23151$ (< 23846)

7. a)

$1^2 = 1 = 0 \cdot 3 + 1$ $\quad 4^2 = 16 = 3 \cdot 5 + 1$

$2^2 = 4 = 1 \cdot 3 + 1$ $\quad 5^2 = 25 = 8 \cdot 3 + 1$ $\quad 7^2 = 49 = 16 \cdot 3 + 1$

$3^2 = 9 = 3 \cdot 3 + 0$ $\quad 6^2 = 36 = 12 \cdot 3 + 0$ $\quad 8^2 = 64 = 21 \cdot 3 + 1$

Die Reste bilden die Zahlenfolge 1,1,0,1,10,1,1,0,...

b) Teilt man eine Quadratzahl durch 3 mit Rest, so ist der Rest 0 oder 1, aber nie 2.

Beweis: 1. k ist durch 3 teilbar

Dann ist $n = k^2$ durch 3 teilbar

Also ist der Rest 0

2. k lässt einen Rest von 1

Also $k = 3a + 1$, $a \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow k^2 = n = (3a+1)^2 = 9a^2 + 6a + 1$$

$$= 3(3a^2 + 2a) + 1$$

Also lässt $n = k^2$ den Rest von 1

3. k lässt einen Rest von 2

Also $k = 3a + 2$, $a \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow k^2 = n = (3a+2)^2 = 9a^2 + 12a + 4$$

$$= 3(3a^2 + 4a + 1) + 1$$

Also lässt $n = k^2$ den Rest von 1