Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, Wi Se 05/06

12. Übung, Lösungsskizzen

Zu allen Aufgaben schreibe ich nur den Schritt $A(n) \to A(n+1)$ auf.

1a) $$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\downarrow \text{Ind. Vor.}$$

$$= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3)$$

$\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$ ausklammern

$$= \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)\left[n+4\right]$$

b) $$50^{n+1} + 6 = 50^n \cdot 50 + 6 = (50^n \underbrace{+6}_{}) \cdot 50 + 6 \underbrace{-300}_{\text{Ausgleich für}}$$

Ind. Vor.

$$= 7 \cdot k \cdot 50 - 294 = 7 \cdot \underbrace{(k \cdot 50 - 42)}_{\in \mathbb{N}}$$

HAUSÜBUNGEN (immer nur $A(n) \to A(n+1)$ dargestellt)

2a) $$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1}$$

$$\downarrow \text{Ind. Vor.}$$

$$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

b) $$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

$$\downarrow \text{Ind. Vor.}$$

$$= \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

$$= \frac{m^2 + 2m + 1}{(m+1)(m+2)} = \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} = \frac{m+1}{m+2}$$

c) $$2^{3(a+1)} - 5^{a+1} = 2^{3a+3} - 5^{a+1} = 2^{3a} \cdot 8 - 5^a \cdot 5$$

$$= 8 \cdot (2^{3a} - 5^a) + 3 \cdot 5^a$$

$$\downarrow \text{Ind. Vor.}$$

$$= 8 \cdot 3k + 3 \cdot 5^a \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

$$= 3 \cdot \underbrace{(8k + 5^a)}_{\in \mathbb{N}}$$

d) $3^{2(n+1)} - 2^{2(n+1)} = 3^{2n+2} - 2^{2n+2} = 9\cdot 3^{2n} - 4\cdot 2^{2n}$

$$= 9\cdot\left(3^{2n} - 2^{2n}\right) + 5\cdot 2^{2n}$$

$\downarrow$ Ind. Vor.

$$= 9\cdot 5k + 5\cdot 2^{2n}, \quad k\in\mathbb{N}$$

$$= 5\cdot\underbrace{\left(9k + 2^{2n}\right)}_{\in\mathbb{N}}$$

3 a) $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$

$$= n^3 - n + 3(n^2 + n)$$

$\downarrow$ Ind. Vor.

$$= 6k + 3n(n+1), \quad k\in\mathbb{N}$$

$$= 6\cdot\left[k + \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$\uparrow$ $\in\mathbb{N}$, denn n oder $n+1$ sind durch 2 teilbar

$$= 6\cdot k^*, \quad k^*\in\mathbb{N}$$

b) $24 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ $\quad$ $n+4$ mit Distribut. auflösen

$$= \underbrace{(n+1)(n+2)(n+3)\cdot n}_{\downarrow\text{ Ind. Vor.}} + (n+1)(n+2)(n+3)\cdot 4$$

$$= 24k + 24\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \qquad k\in\mathbb{N}$$

$$(n+1)(n+2)(n+3) = n^3 + 6n^2 + 11n + 6 = (n^3 - n) + 6(n^2 + 2n + 1)$$

Aufg. a)

$$= 6k + 6(n+1)^2, \quad k\in\mathbb{N}$$

also ist $(n+1)(n+2)(n+3)$ durch 6 teilbar, also

$$= 24k + 24k^* \qquad k^*\in\mathbb{N}$$

4. Der Schritt von n auf $n+1$ beweist weder die Aussage für n noch für $n+1$.
Logisch geht es um die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$
„Wenn ich bis n gekommen bin, dann kann ich auch noch einen Schritt weiter gehen"
Dafür ist $A(n)$ die Voraussetzung, kann also im Beweis der Implikation verwendet werden.
Die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ allein beweist ja noch nicht die Gültigkeit von A für alle natürlichen Zahlen.
Dazu ist der Induktionsanfang (z.B. „$A(1)$ ist richtig") auch noch notwendig.