Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 05/06

11. Übung, Lösungsskizzen

1a) Mit Zurücklegen gibt es mehr Möglichkeiten als ohne, ebenso ist bei Berücksichtigung der Reihenfolge die Anzahl größer als ohne

b)

Reihenfolge \ Zurücklegen	mit		ohne
mit	n^k	$\geq$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
	$\vee\!\mid$		$\vee\!\mid$
ohne	$\binom{n-1+k}{k}$	$\geq$	$\binom{n}{k}$

Am größten ist danach n^k, am kleinsten $\binom{n}{k}$

Dazwischen liegen $\frac{n!}{(n-k)!}$ und $\binom{n-1+k}{k}$, die sich

c) untereinander schwer vergleichen lassen. Die kombinatorische Überlegung zeigt einmal eine Veränderung, die die Anzahl erhöht (ohne → mit Reihenfolge) aber auch eine, die die Anzahl verringert (mit → ohne Zurücklegen)

Eine Exceltabelle zeigt, dass bis auf Ausnahmen (fett in oberer Tab) $\frac{n!}{(n-k)!}$ größer ist als $\binom{n-1+k}{k}$

→

2. a) $$\frac{n^8}{8!} = \frac{n^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} = \frac{n^8}{2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7}$$

Hier sieht man, dass n die Primfaktoren 2, 3, 5 und 7 enthalten muss. Da im Zähler n^8 steht, reicht es, dass die Primfaktoren in der 1. Potenz in n vorkommen zu 1c)

mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge

k \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	**3**	6	10	15	21	28	36	45
3	1	4	**10**	20	35	56	84	120	165
4	1	5	15	**35**	70	126	210	330	495
5	1	6	21	56	**126**	252	462	792	1287
6	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435
8	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870
9	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310
10	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758

$$\binom{n-1+k}{k}$$

ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge

k \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	####	2	6	12	20	30	42	56	72
3	####	####	6	24	60	120	210	336	504
4	####	####	###	24	120	360	840	1680	3024
5	####	####	###	#####	120	720	2520	6720	15120
6	####	####	###	#####	#####	720	5040	20160	60480
7	####	####	###	#####	#####	#ZAHL!	5040	40320	181440
8	####	####	###	#####	#####	#ZAHL!	#ZAHL!	40320	362880
9	####	####	###	#####	#####	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	362880
10	####	####	###	#####	#####	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

---

2 Forts.

$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 \quad \Rightarrow \quad \frac{n^8}{8!} = \frac{2^8 \cdot 3^8 \cdot 5^8 \cdot 7^8}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = 2 \cdot 3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^7 \in \mathbb{N}$

b) Jedes Vielfache von 210 ist eine Lösung für $\frac{n^8}{8!} \in \mathbb{N}$

Hausübungen

3a) Konkret 5 Dinge $\uparrow 1 \uparrow 2 \uparrow 3 \uparrow 4 \uparrow 5 \uparrow$

Das 6. Ding kann an 6 Stellen eingefügt werden (Pfeile). Zu jeder Anordnung von 5 Dingen gibt es 6 Möglichkeiten, das 6. Ding einzufügen

b) Daraus folgt $P(6) = 6 \cdot P(5)$

c) Allgemein gilt dann $P(n) = n \cdot P(n-1)$, denn es gibt bei $n-1$ Dingen n Positionen, an denen das nächste, n-te Ding eingefügt werden kann.

d) Man kann nun folgende Kette aufschreiben

$$P(n) = n \cdot P(n-1)$$
$$P(n-1) = (n-1) \cdot P(n-2)$$
$$P(n-2) = (n-2)\, P(n-3)$$
$$\cdots\cdots$$
$$P(2) = 2 \cdot \underbrace{P(1)}_{=1}$$

Setzt man das schrittweise ein,

erhält man (wieder) $P(n) = n!$

4a) Vorlesung: $\binom{n-1+k}{k} = \binom{7}{4} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} = 35$

b)

	(c)
1 1 1 1	1
1 1 1 2	4
1 1 1 3	4
1 1 1 4	4
1 1 2 2	6
1 1 2 3	12
1 1 2 4	12
1 1 3 3	6
1 1 3 4	12
1 1 4 4	6
1 2 2 2	4
1 2 2 3	12
1 2 2 4	12
1 2 3 3	12
1 2 3 4	24
1 2 4 4	12
1 3 3 3	4
1 3 3 4	12
1 3 4 4	12
1 4 4 4	4
2 2 2 2	1
2 2 2 3	4
2 2 2 4	4
2 2 3 3	6
2 2 3 4	12
2 2 4 4	6
2 3 3 3	4
2 3 3 4	12
2 3 4 4	12
2 4 4 4	4
3 3 3 3	1
3 3 3 4	4
3 3 4 4	6
3 4 4 4	4
4 4 4 4	1

$\frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ $\qquad \frac{4!}{2!} = 12$

d) Addition:

$$1 \cdot 4 + 4 \cdot 12 + 6 \cdot 6 + 12 \cdot 12 + 24 \cdot 1$$
$$= 4 + 48 + 36 + 144 + 24$$
$$= 256$$

Bei den Permutationen berücksichtigt man die Reihenfolge.

Also Ziehen <u>mit</u> Wiederholung, <u>mit</u> Berücksichtigung der Reihenfolge

$n^k = 4^4 = 256$

Das stimmt mit der Aufsummation überein.

5. Das Verteilen der Karten geschieht natürlich ohne Zurücklegen. Das Ergebnis wird ohne Berücksichtigung der Reihenfolge betrachtet, denn jeder Spieler darf nach dem Geben die Karten nach Belieben ordnen.

Also: k Karten erhalten von n: $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten

1. Der erste Spieler bekommt 6 von 60 Karten, der zweite 6 von den verbiebenen 54, der dritte 6 von den verbliebenen 48.

2. Die 60 Karten werden neben einander gelegt. (60-Tupel) Unter jede Karte wird 1, 2, 3 oder M geschrieben für den 1., 2., 3. Spieler oder den Reststapel in der Mitte. Dann ist jede Kartenverteilung ein 60-Tupel aus 6 Einsen 6 Zweien 6 Dreien und 42 Ms. Alle Permutationen sind dann ~~der~~ der angegebene Bruch.

3. Man wählt erst 18 Karten aus, die verteilt werden sollen. Diese 18 Karten werden dann an den 1. Spieler ~~de~~ verteilt. Der 2. Spieler erhält 6 aus den verbliebenen 12 Karten, der 3. Spieler die letzten 6.

c) 1. umformen: $\binom{60}{6}\binom{54}{6}\binom{48}{6} = \frac{60!}{6!\,\cancel{54!}} \frac{\cancel{54!}}{\cancel{6}!\,\cancel{48!}} \frac{\cancel{48!}}{6!\,42!} = 2.$

3. umf.: $\binom{60}{18} \cdot \binom{18}{6}\binom{12}{6}\binom{6}{6} = \frac{60!}{\cancel{18!} \cdot 42!} \frac{\cancel{18!}}{6!\,\cancel{12!}} \frac{\cancel{12!}}{6!\,6!} \frac{\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,0!} = 2.$

(Beachte $0! = 1$)

6. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$

Wegen $(k+1)! = (k+1)\cdot k!$ und

$(n-k)! = (n-k)\cdot(n-k-1)!$

und dem Hauptnenner $(k+1)!\cdot(n-k)!$

$$= \frac{n!\,(k+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} + \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)}$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}\,(k+1+n-k) = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}\,(n+1)$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1} \quad \text{q.e.d.}$$

7. Zu jedem Schnittpunkt von Verbindungsstrecken gehören genau 4 verschiedene Punkte auf dem Kreis.

Und zu jedem Schnittpunkt ist diese Zuordnung von 4 Punkten umkehrbar eindeutig.

Die Auswahl der 4 Punkte geschieht ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

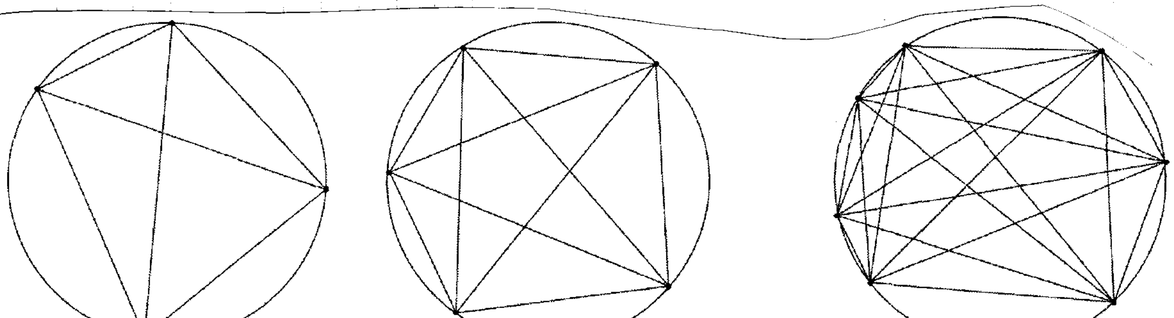
Also gibt es bei n Punkten auf dem Rand, $n \geq 4$

$\binom{n}{4} = \frac{1}{24}\, n(n-1)(n-2)(n-3)$ Schnittpunkte

$n = 4$: $\frac{1}{24}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 1$ Schnittpunkt

$n = 5$: $\frac{1}{24}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 5$ Schnittpunkte

$n = 6$: $\frac{1}{24}\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 15$ Schnittpunkte (siehe Aufgabenblatt)



4-Eck 5-Eck 7-Eck