Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 05/06

10. Übung, Lösungsskizzen

1.

2 Farben

a) 1 Klötzchen hat eine Farbe, alle anderen die zweite

$n = (n-1) + 1 \qquad n-1 \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 2$

Anzahl der Türme: $\frac{n!}{(n-1)!\,1!} = n \leq 25$

Für $2 \leq n \leq 25$ kann man dann die Aufgabe stellen

„Du hast einen gelben und $n-1$ blaue Klötzchen.
Wie viele verschiedene Türmchen kannst du bauen?"

b) 2 Klötzchen eine, alle anderen die zweite

$n = (n-2) + 2 \qquad n-2 \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 4$ (sonst Fall aus a))

Anzahl der Türme: $\frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{1}{2} n(n-1) \leq 25$ Gilt für $n \leq 7$

Für $4 \leq n \leq 7$: „Du hast zwei gelbe und $n-2$ grüne…"

c) $n = (n-3) + 3 \qquad n-3 \geq 3 \Leftrightarrow n \geq 6$ (sonst Fall aus a) oder b))

Anzahl der Türme $\frac{n!}{(n-3)!\,3!} = \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) \leq 25$

Gilt für $n \leq 6$

Für $n = 6$: „Du hast 3 gelbe und 3 rote Klötzchen…"

Man kann erkennen, dass andere Ansätze für zwei Farben keine Lösungen ergeben werden.

3 Farben

a) Je ein Klötzchen haben eine Farbe, $n-2$ Klötzchen die dritte Farbe $\qquad n-2 \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 3 \qquad n = (n-2)+1+1$

Anzahl d. Türme $\frac{n!}{(n-2)!\,1!\,1!} = n(n-1) \leq 25$ Gilt für $n \leq 5$

Für $3 \leq n \leq 5$: „Du hast einen gelben, einen roten und $n-2$ blaue Klötzchen…"

b) $n = (n-3) + 2 + 1 \qquad n-3 \geq 2 \iff n \geq 5$

Anzahl d. Türme $\dfrac{n!}{(n-3)!\,2!\,1!} = \frac{1}{2}\, n(n-1)(n-2) \leq 25$

~~Keine~~ Gilt für $n \leq 4$

Also gibt es keine Lösung.

4 Farben

$n = (n-3) + 1 + 1 + 1 \qquad n-3 \geq 1 \iff n \geq 4$

Anz. d. Türme $\dfrac{n!}{(n-3)!\,1!\,1!\,1!} = n(n-1)(n-2) \leq 25$

Gilt für $n \leq 4$

$n = 4$: „Du hast einen gelben, einen blauen, einen roten und einen grünen Klotz. ..."

Zusammenfassung

Farben	Klötzchenkomb.	Zahl der Klötzchen	Anzahl der Türme
2	$(n-1)+1$	$2 \leq n \leq 25$	n
	2+2 3+2 4+2 5+2	4 5 6 7	6 10 15 21
	3+3	6	20
3	1+1+1 2+1+1 3+1+1	3 4 5	6 12 20
4	1+1+1+1	4	24

2.

Man hat $n = 8$ Buchstaben, davon sind $k_1 = 2$ gleich und $k_2 = 3$ gleich

Nach der allgemeinen Permutationsformel gibt es $\dfrac{8!}{2!\,3!} = \dfrac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}} = 3360$

Dann braucht man $3360\,s = 56$ min für alle Kombinationen

3. a) Euklid. Algor. b)

$47 = 1\cdot 35 + 12 \Rightarrow 12 = \underline{47} - 1\cdot \underline{35}$ ①

$35 = 2\cdot 12 + 11 \Rightarrow 11 = \underline{35} - 2\cdot \underline{12}$ ②

$12 = 1\cdot 11 + 1 \Rightarrow 1 = \underline{12} - 1\cdot \underline{11}$ ② einsetzen

$= \underline{12} - 1\cdot(\underline{35} - 2\cdot \underline{12})$

weiter b)

$1 = 3\cdot \underline{12} - 1\cdot \underline{35} \overset{①}{=} 3\cdot(\underline{47} - 1\cdot \underline{35}) - 1\cdot \underline{35}$

also $3\cdot \underline{47} - 4\cdot \underline{35} = 1$ $x = 3$ $y = -4$

c) Multipl. mit 4

$12\cdot \underline{47} - 16\cdot \underline{35} = 4$

$35\cdot \underline{47} - 47\cdot \underline{35} = 0$

Addiert man beide Gleichungen, so werden die Faktoren vor $\underline{47}$ und $\underline{35}$ größer.

Also Subtraktion beider Gleichungen

$-23\cdot \underline{47} + 31\cdot \underline{35} = 4$

Also ist die Lösung $(x;y) = (12;-16)$ diejenige, für die $|x|+|y|$ minimal ist.

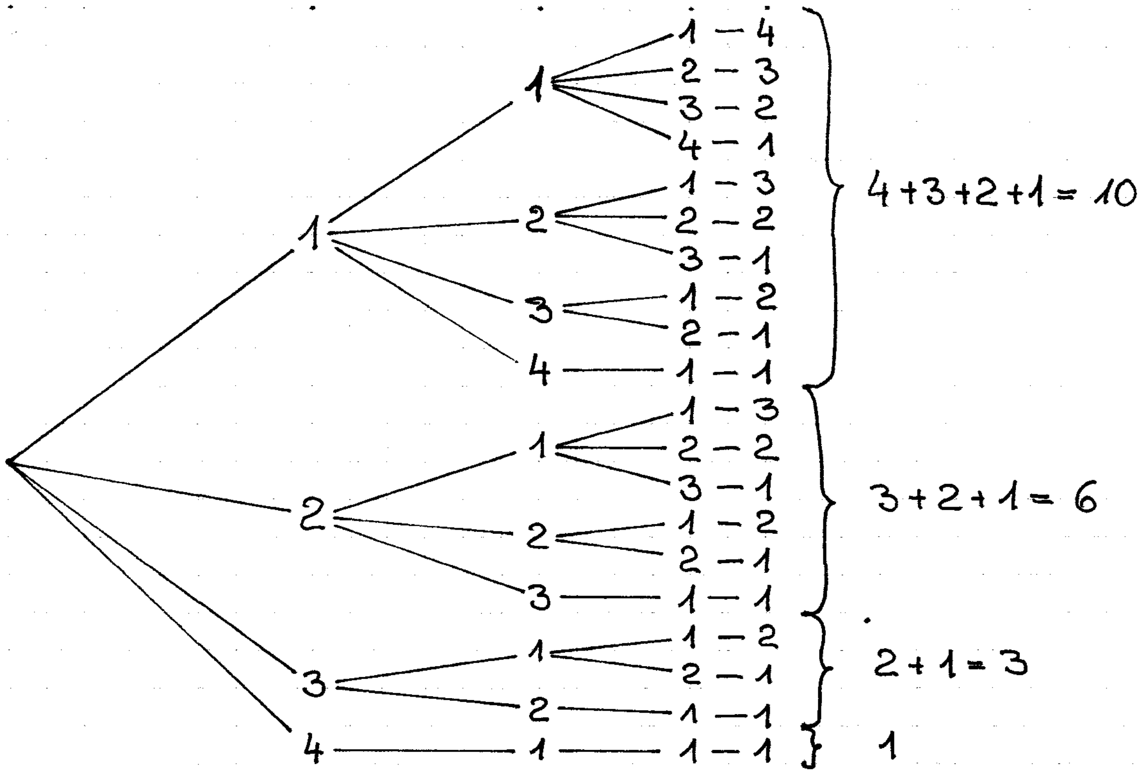
4

w w s s
w w s b
w w b b
w s s s
w s s b
w s b b
w b b b
s s s b
s s b b
s b b b
b b b b

4 Kugeln mit einem Zug ⇒ es wird keine Reihenfolge unterschieden. Um nicht den Fehler zu machen, zwei Möglichkeiten zu berücksichtigen, die sich nur durch die Reihenfolge unterscheiden, legen wir für die Farben eine Reihenfolge fest.

Das klingt widersprüchlich, ist aber die Lösung. Weiß vor Schwarz vor Blau, d.h. z.B. nach einer schwarzen Kugel darf keine weiße mehr aufgezählt werden.

5



Insgesamt sind es $1+3+6+10 = 20$ Möglichkeiten

6. Wenn zwei Tische die gleiche Sitzordnung zeigen, so sind sie zueinander kongruent. Es gibt also eine Drehung oder Spiegelung, die die beiden Sitzordnungen aufeinander abbildet. Um zu vermeiden, dass Sitzordnungen, die durch Drehungen zusammenhängen, doppelt gezählt werden, wird A immer auf denselben Platz gesetzt

„aufschneiden" und gerade biegen zu

$\overrightarrow{ABCDE}$ A bleibt immer auf dem ersten Platz.

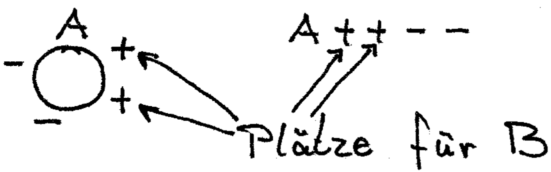
Dann gibt es $4! = 24$ Sitzordnungen mit A auf dem ersten Platz. Dann gibt es immer 2 Sitzordnungen, die durch Spiegelung (Spiegelachse durch die Tischmitte und Platz A) zusammenhängen.

z.B

und

also ABCDE und AEDCB

Schreibt man nun vor, dass B immer in der rechten Hälfte sitzen muss, vermeidet man diese Doppelzählung. In der „aufgebogenen" Schreibweise heißt das, dass B nur auf Platz 2 oder 3 stehen darf.



Also	ABCDE	ACBDE	Das sind die
	ABCED	ACBED	
	ABDCE	ADBCE	12 möglichen
	ABDEC	ADBEC	
	ABECD	AEBCD	Sitzordnungen
	ABEDC	AEBDC	