

13. Übung

Fibonacci-Zahlen, goldener Schnitt

Präsenzübungen (für Freitag, 30.1., Es kommt noch eine letzte Präsenzübung)

1. Das verblüffende Puzzle

Ein Quadrat von 13 LE Kantenlänge lässt sich wie rechts dargestellt in vier Teile teilen. Diese vier Teile kann man neu anordnen zu einem länglichen Rechteck (siehe unten).

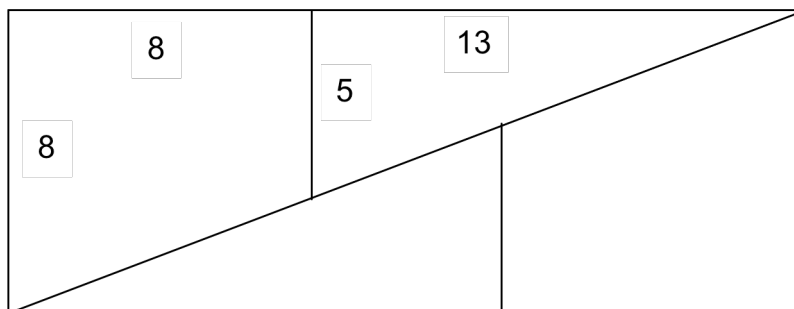
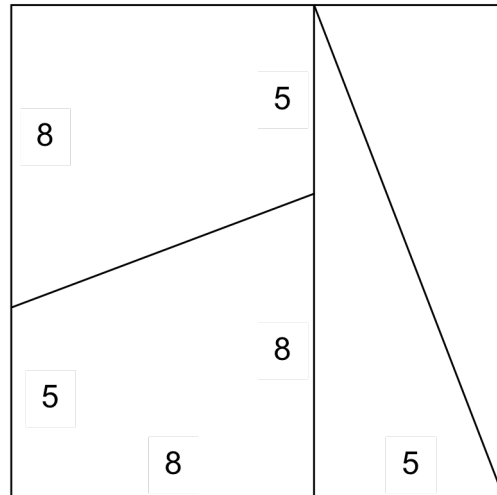
Das Quadrat hat einen Flächeninhalt von $13 \text{ LE} \cdot 13 \text{ LE} = 169 \text{ FE}$

Das Rechteck hat die Kantenlängen 8 LE und 21 LE. Das ergibt überraschenderweise einen Flächeninhalt von 168 FE. Es ist also eine Flächeneinheit beim Umlegen verloren gegangen. Wo ist sie geblieben?

Auffällig ist, dass hier die Fibonacci-Zahlen 5, 8, 13 und 21 beteiligt sind.

Welche Rolle spielen sie?

Das können Sie herausfinden, wenn Sie ein 12×12 Quadrat ähnlich in vier Teile zerschneiden, aber dabei die „8“ durch „7“ ersetzen.



Zeichnen Sie die Teile auf, schneiden Sie sie aus und **bringen Sie sie mit in die Übung**

Hausübungen (Abgabe: Dienstag, 3.2. Das ist die letzte abzugebende Übung)

2. Zahlenfolgen

Von einer arithmetischen Zahlenfolge kennen Sie $a_3 = 38$ und $a_5 = 48$.

- Geben Sie zur Zahlenfolge das rekursive Bildungsgesetz und den Startwert a_0 an.
- Geben Sie die explizite Form an. Berechnen Sie damit a_{50} .

3. Spielerei mit allgemeinen Fibonacci-Zahlen (Grundschule)

Denke dir zwei Zahlen (zwischen 1 und 20) und schreibe sie nebeneinander. Erst die kleinere, dann die größere. Zähle beide Zahlen zusammen und schreibe sie rechts daneben. Zähle die letzten beiden Zahlen zusammen und schreibe sie wieder rechts daneben. Mache das so lange, bis sechs Zahlen nebeneinander stehen.

Rätsel: Mit welchen Zahlen musst du anfangen, damit du mit der sechsten Zahl genau

100 triffst.

Ihre Aufgaben

- a. Geben Sie alle Lösungen des Rätsels an.
 - b. Geben Sie alle Lösungen an, wenn man mit beliebigen natürlichen Zahlen beginnen darf und bei den beiden Startzahlen auch die größere vor der kleineren stehen darf.
4. Zeichnen Sie eine 10 cm lange Strecke. Teilen Sie diese (nur durch Abmessen) im goldenen Schnitt ($\varphi \approx 0,618$). Teilen Sie anschließend den Major auch wieder im goldenen Schnitt.
- a. Beschreiben Sie, wie Sie vorgehen.
 - b. Überzeugen Sie sich durch Messen, dass der Major der zweiten Teilung gleich dem Minor der ersten Teilung ist.
 - c. Begründen Sie den Zusammenhang.
5. Für die Fibonacci-Zahlen F_n gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
- $$F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$
- a. Verdeutlichen Sie die Aussage für $n = 4, 5$ und 8 .
 - b. Beweisen Sie sie mit vollständiger Induktion. (*das ist nicht ganz einfach*)

6. Übung zur Termumformung

Es hat knapp 600 Jahre gedauert, bis die Mathematiker eine explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen gefunden hatten. Sie ist heute bekannt als die Formel von Binet (Jacques Philippe Marie Binet, 1786 - 1856, Franzose)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), n \in \mathbb{N}$$

Berechnen Sie F_3 . Rechnen Sie dazu mit $\sqrt{5}$ exakt und nicht mit der dezimalen Näherung.